

Gravitación

<http://maestroencasa.net>

CHAPTER 5

Gravitation

Con Apuntes
Vidales.

FINAL

5.1 Introduction

By 1666, Newton had formulated and numerically checked the gravitation law he eventually published in his book *Principia* in 1687. Newton waited almost 20 years to publish his results because he could not justify his method of numerical calculation in which he considered Earth and the Moon as point masses. With mathematics formulated on calculus (which Newton later invented), we have a much easier time proving the problem Newton found so difficult in the seventeenth century.

Newton's law of universal gravitation states that *each mass particle attracts every other particle in the universe with a force that varies directly as the product of the two masses and inversely as the square of the distance between them*. In mathematical form, we write the law as

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.1)$$

where at a distance r from a particle of mass M a second particle of mass m experiences an attractive force (see Figure 5-1). The unit vector $\mathbf{e}_r$ points from M to m , and the minus sign ensures that the force is attractive—that is, that m is attracted toward M .

A laboratory verification of the law and a determination of the value of G was made in 1798 by the English physicist Henry Cavendish (1731–1810). Cavendish's experiment, described in many elementary physics texts, used a torsion balance with two small spheres fixed at the ends of a light rod. The two spheres were attracted to two other large spheres that could be placed on either side of the smaller spheres. The official value for G is $6.673 \pm 0.010 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Interestingly, although G is perhaps the oldest known of the fundamental constants,

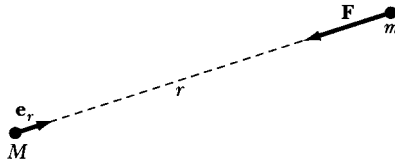


FIGURE 5-1 Particle m feels an attractive gravitational force toward M .

we know it with less precision than we know most of the modern fundamental constants such as e , c , and $\hbar$. Considerable research is ongoing today to improve the precision of G .

In the form of Equation 5.1, the law strictly applies only to *point particles*. If one or both of the particles is replaced by a body with a certain extension, we must make an additional hypothesis before we can calculate the force. We must assume that the gravitational force field is a *linear field*. In other words, we assume that it is possible to calculate the net gravitational force on a particle due to many other particles by simply taking the vector sum of all the individual forces. For a body consisting of a continuous distribution of matter, the sum becomes an integral (Figure 5-2):

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \vec{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (5.2)$$

where $\rho(\mathbf{r}')$ is the mass density and dv' is the element of volume at the position defined by the vector $\mathbf{r}'$ from the (arbitrary) origin to the point within the mass distribution.

If both the body of mass M and the body of mass m have finite extension, a second integration over the volume of m will be necessary to compute the total gravitational force.

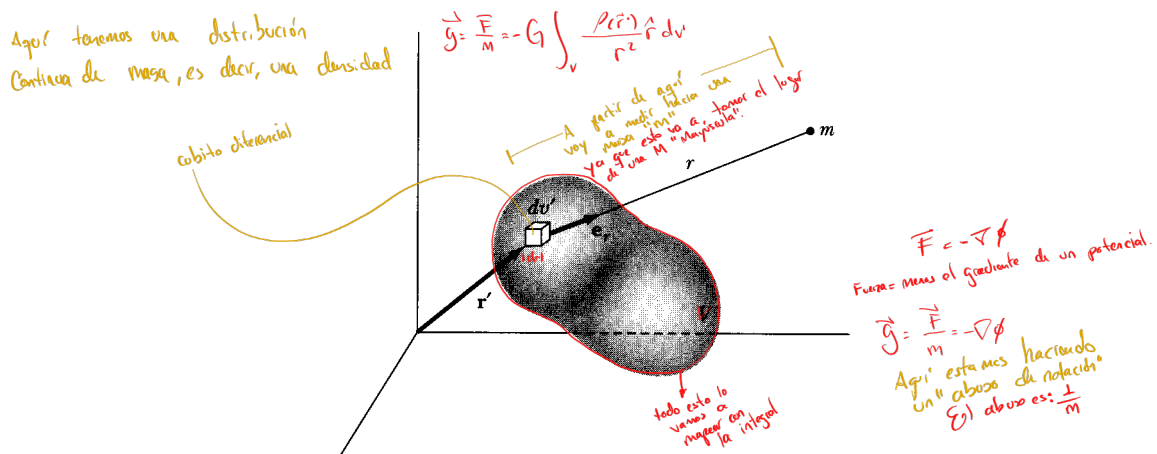


FIGURE 5-2 To find the gravitational force between a point mass m and a continuous distribution of matter, we integrate the mass density over the volume.

LA FUERZA COMO GRADIENTE DE UN POTENCIAL

Se define la potencia como el producto escalar del vector fuerza por el vector velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} ; \text{ si } \vec{F} = Cte \text{ o } \vec{v} = Cte \rightarrow P = Cte$$

Cuando un vector es tal que su componente en una dirección es igual a la derivada direccional de una función en aquella dirección, el vector se llama gradiente de la función. Podemos así decir que F es el negativo del gradiente de U y escribir la ecuación $F \cos \theta = -dU/ds$ en la forma general:

$$\vec{F} = -\text{grad } U$$

Cuando estemos interesados en las componentes rectangulares de F a lo largo de los ejes X,Y,Z la expresión $F \cos \theta$ en la ecuación $F \cos \theta = -dU/ds$ será F_x, F_y, F_z y el desplazamiento ds será dx,dy,dz, respectivamente, de forma que

$$\vec{F}_x = -\frac{\partial U}{\partial x} ; \vec{F}_y = -\frac{\partial U}{\partial y} ; \vec{F}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

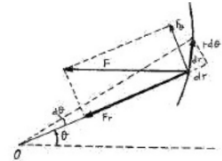
O lo que es igual:

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \hat{k}$$

Nótese que empleamos la notación de derivadas parciales ya que la energía potencial U (x,y,z) es en general una función de las tres variables x,y,z pero al desplazarse una partícula una distancia dx a lo largo del eje X, por ejemplo, las coordenadas y,z permanecen invariables; por ello en vez de escribir dU/dx debemos poner .

Si el movimiento es plano y se usan las coordenadas r, θ , el desplazamiento a lo largo del radio vector r es dr y el desplazamiento perpendicular al radio vector es $r \cdot d\theta$. Luego, las componentes radial y trasversal de la fuerza son:

$$\vec{F}_r = -\frac{\partial U}{\partial r} ; \vec{F}_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r}$$



Donde de nuevo hemos empleado derivadas parciales.

Un caso importante es aquel en que la energía potencial U depende de la distancia r, pero no del ángulo θ ; es decir, en vez de tener U(r, θ), se tiene U(r). Entonces queda:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

con lo cual se tiene $\vec{F}_\theta = 0$. La fuerza entonces solo tiene componente radial, de manera que la fuerza es central: su línea de acción pasa siempre por el centro. Recíprocamente, si la fuerza es central, existe tan solo componente radial y $\vec{F}_\theta = 0$, dando

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

lo que implica que U es independiente de θ . Obtenemos de ese modo el resultado de que una fuerza central depende solamente de la distancia de la partícula al centro, de modo que la energía potencial asociada a una fuerza central depende solamente de la distancia de la partícula al centro de la fuerza, y recíprocamente.

Cuando las fuerzas no son centrales, existe un momento alrededor del punto O dado por $p = \vec{F}_\theta \cdot r$ ya que la fuerza radial al ser paralela al radio tiene momento nulo.

El momento en función de la energía potencial viene dado por:

$$\vec{F}_\theta \cdot r = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot r = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Siempre que la energía potencial depende del ángulo, actúa un momento sobre el sistema causando un cambio en el momento angular en dirección perpendicular al plano del ángulo.

The **gravitational field vector** $\mathbf{g}$ is the vector representing the force per unit mass exerted on a particle in the field of a body of mass M . Thus

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.3)$$

or

$$\mathbf{g} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (5.4)$$

Note that the direction of $\mathbf{e}_r$ varies with r' (in Figure 5-2).

The quantity $\mathbf{g}$ has the dimensions of *force per unit mass*, also equal to *acceleration*. In fact, near the surface of the earth, the magnitude of $\mathbf{g}$ is just the quantity that we call the **gravitational acceleration constant**. Measurement with a simple pendulum (or some more sophisticated variation) is sufficient to show that $|\mathbf{g}|$ is approximately 9.80 m/s^2 (or 9.80 N/kg) at the surface of the earth.

5.2 Gravitational Potential

The gravitational field vector $\mathbf{g}$ varies as $1/r^2$ and therefore satisfies the requirement* that permits $\mathbf{g}$ to be represented as the gradient of a scalar function. Hence, we can write

$$\mathbf{g} \equiv -\nabla\Phi \quad (5.5)$$

where Φ is called the **gravitational potential** and has dimensions of (*force per unit mass*) $\times$ (*distance*), or *energy per unit mass*.

Because $\mathbf{g}$ has only a radial variation, the potential Φ can have at most a variation with r . Therefore, using Equation 5.3 for $\mathbf{g}$, we have

$$\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{e}_r = G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Integrating, we obtain

$$\Phi = -G \frac{M}{r} \quad (5.6)$$

The possible constant of integration has been suppressed, because the potential is undetermined to within an additive constant; that is, only *differences* in potential are meaningful, not particular values. We usually remove the ambiguity in the value of the potential by arbitrarily requiring that $\Phi \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$; then Equation 5.6 correctly gives the potential for this condition.

*That is, $\nabla \times \mathbf{g} = 0$.

Algo ya tenemos estos 2 relacionados

$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$

Esto se infiere de las 2 relaciones anteriores

$\nabla\Phi = \frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$

de manera discreta podemos quitarlas de dependencia Vectorial:

$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Phi = \frac{GM}{r^2}$

hacemos esto ya que solo es de funci3n de r

Integrating, we obtain

$d\Phi = \frac{GM}{r^2} dr$

$\Phi = -\frac{GM}{r}$ finalmente as3 nos queda el Potencial.

¿C3mo nos quedar3a en potencial gravitacional para una distribuci3n de masa?

The potential due to a continuous distribution of matter is

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' \quad (5.7)$$

Handwritten notes:
 - A red arrow points from the text "The potential due to a continuous distribution of matter is" to the equation.
 - Next to the equation, it says "Potential Gravitacional para una d.c.m."
 - To the right, in red, it says: "Esta ecuación nos va a ayudar a resolver algunos problemas. IR AL EJEMPLO 5.1"

Similarly, if the mass is distributed only over a thin shell (i.e., a *surface* distribution), then

$$\Phi = -G \int_S \frac{\rho_s}{r} da' \quad (5.8)$$

where ρ_s is the surface density of mass (or *areal mass density*).

Finally, if there is a *line source* with linear mass density ρ_l , then

$$\Phi = -G \int_L \frac{\rho_l}{r} ds' \quad (5.9)$$

The physical significance of the gravitational potential function becomes clear if we consider the work per unit mass dW' that must be done by an outside agent on a body in a gravitational field to displace the body a distance $d\mathbf{r}$. In this case, work is equal to the scalar product of the force and the displacement. Thus, for the work done *on* the body per unit mass, we have

$$\begin{aligned} dW' &= -\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi \end{aligned} \quad (5.10)$$

because Φ is a function only of the coordinates of the point at which it is measured: $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_i)$. Therefore the amount of work per unit mass that must be done on a body to move it from one position to another in a gravitational field is equal to the difference in potential at the two points.

If the final position is farther from the source of mass M than the initial position, work has been done *on* the unit mass. The positions of the two points are arbitrary, and we may take one of them to be at infinity. If we define the potential to be zero at infinity, we may interpret Φ at any point to be the work per unit mass required to bring the body from infinity to that point. The *potential energy* is equal to the mass of the body multiplied by the potential Φ . If U is the potential energy, then

$$U = m\Phi \quad (5.11)$$

and the force on a body is given by the negative of the gradient of the potential energy of that body,

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (5.12)$$

which is just the expression we have previously used (Equation 2.88).

We note that both the potential and the potential energy *increase* when work is done *on* the body. (The potential, according to our definition, is always negative and only approaches its maximum value, that is, zero, as r tends to infinity.)

A certain potential energy exists whenever a body is placed in the gravitational field of a source mass. This potential energy resides in the *field*,* but it is customary under these circumstances to speak of the potential energy “of the body.” We shall continue this practice here. We may also consider the source mass itself to have an intrinsic potential energy. This potential energy is equal to the gravitational energy released when the body was formed or, conversely, is equal to the energy that must be supplied (i.e., the work that must be done) to disperse the mass over the sphere at infinity. For example, when interstellar gas condenses to form a star, the gravitational energy released goes largely into the initial heating of the star. As the temperature increases, energy is radiated away as electromagnetic radiation. In all the problems we treat, the structure of the bodies is considered to remain unchanged during the process we are studying. Thus, there is no change in the intrinsic potential energy, and it may be neglected for the purposes of whatever calculation we are making.

EXAMPLE 5.1

What is the gravitational potential both inside and outside a spherical shell of inner radius b and outer radius a ?

Solution. One of the important problems of gravitational theory concerns the calculation of the gravitational force due to a homogeneous sphere. This problem is a special case of the more general calculation for a homogeneous spherical shell. A solution to the problem of the shell can be obtained by directly computing the force on an arbitrary object of unit mass brought into the field (see Problem 5-6), but it is easier to use the potential method.

We consider the shell shown in Figure 5-3 and calculate the potential at point P a distance R from the center of the shell. Because the problem has symmetry about the line connecting the center of the sphere and the field point P , the azimuthal angle ϕ is not shown in Figure 5-3 and we can immediately integrate over $d\phi$ in the expression for the potential. Thus,

$$\begin{aligned}\Phi &= -G \int_V \frac{\rho(r')}{r} dv' \\ &= -2\pi\rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta\end{aligned}\quad (5.13)$$

where we have assumed a homogeneous mass distribution for the shell, $\rho(r') = \rho$. According to the law of cosines,

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta \quad (5.14)$$

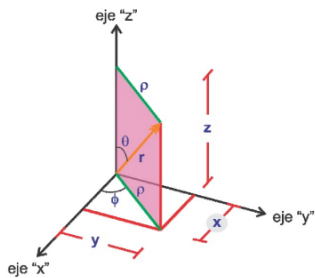
Because R is a constant, for a given r' we may differentiate this equation and obtain

$$2r dr = 2r'R \sin \theta d\theta$$

*See, however, the remarks at the end of Section 9.5 regarding the energy in a field.

Antes de comenzar, observemos el siguiente dibujo, e identifiquemos los parámetros

$x, y, z, r, \rho, \theta, \phi$



Podemos observar que:

1. 'x', 'y' y 'z', son las coordenadas rectangulares que ya conocemos y que representan longitudes medidas sobre cada uno de los ejes 'X', 'Y' y 'Z' respectivamente.
2. 'rho' es la longitud de la proyección del radio vector 'r' sobre el plano 'X-Y'.
3. 'phi' es el ángulo azimutal y está descrito sobre el plano 'X-Y', se mide desde eje 'X' positivo y hasta la línea 'rho', siempre en sentido positivo (es decir, en contra de las manecillas del reloj). phi puede tomar valores desde 0 y hasta 2pi, es decir, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (Cuestión de fuentes: será indistinto poner theta o phi).

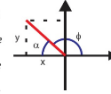
4. 'x', 'y', 'rho' forman un triángulo rectángulo, donde 'rho' es la hipotenusa, 'x' el cateto adyacente a 'phi' y 'y' el cateto opuesto a 'phi'.



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De donde:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi) \\ y &= \rho \sin(\phi) \end{aligned} \quad \phi = \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 1er cuadrante} \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 2do cuadrante} \\ \pi + \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 3er cuadrante} \\ 2\pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 4to cuadrante} \end{cases}$$



5. 'theta' es el ángulo polar, el cual se forma en el plano 'Z-r', a partir del eje 'Z' positivo y hasta la línea 'r'. theta puede tomar valores que van de 0 a pi, es decir, $0 \leq \theta \leq \pi$.

6. 'z', 'rho' y 'r' forman un triángulo rectángulo, donde 'r' es la hipotenusa, 'z' es el cateto adyacente al ángulo 'theta' y 'rho' es el cateto opuesto al ángulo 'theta'.



De donde:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \rho &= r \sin(\theta) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{\rho}{z} \right| & \text{para } z > 0 \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{\rho}{z} \right| & \text{para } z < 0 \\ 0 & \text{para } z = 0 \end{cases}$$

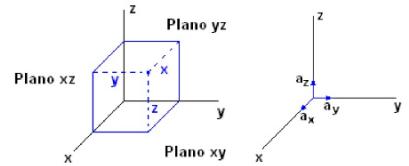
Coordenadas rectangulares: (x, y, z)

Coordenadas Esféricas: (r, θ, ϕ)

Coordenadas Cilíndricas (ρ, ϕ, z)

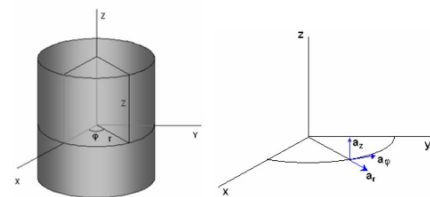
SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Observe el dibujo de abajo para entender este sistema



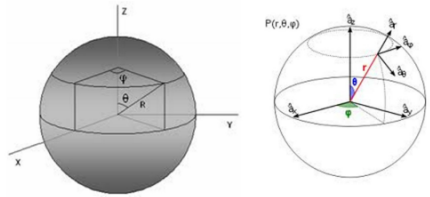
SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

Observe el dibujo de abajo para entender este sistema



SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Observe el dibujo de abajo para entender este sistema



TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS EN 3D

Siempre que se expresa analíticamente, un punto, un vector, la ecuación de una curva o de una superficie, o simplemente alguna expresión o ecuación cualquiera, cada variable representa una coordenada, de tal forma que el conjunto de variables estará en algún sistema de coordenadas, este sistema puede ser cualquiera, de hecho podría no obedecer a alguna geometría en especial, es decir, las coordenadas pueden ser generalizadas. por ejemplo, las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \sin(\omega_1 t + \phi_0) \\ x(t) &= L_0 + A \cos(\omega_2 t + \phi_0) \end{aligned}$$

Con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_0}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

no representan coordenadas cartesianas, ni cilíndricas o esféricas, simplemente son las coordenadas naturales del movimiento, es decir son las coordenadas generalizadas más convenientes, dado que hay dos grados de libertad para el movimiento del péndulo: a lo largo del resorte (coordenada x) y en movimiento angular alrededor de la vertical (coordenada theta).

Sin embargo gran parte de los análisis de muchos sistemas, caen en la conveniencia de utilizar coordenadas, ya sea rectangulares o cilíndricas o esféricas, por lo cual vale la pena seguir el análisis de este tema y mostrar como pasar la representación de un punto, un radio vector o una ecuación, que esté en alguno de estos sistemas de coordenadas, a otro de estos sistemas de coordenadas. Cabe notar que solo hay seis posibles transformaciones:

Cilíndricas a Rectangulares
Rectangulares a Cilíndricas
Esféricas a Rectangulares
Rectangulares a Esféricas
Cilíndricas a Esféricas
Esféricas a Cilíndricas

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS ESFÉRICAS A RECTANGULARES:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi & y &= \rho \sin \phi & z &= r \cos \theta \\ \mathbf{x} &= r \sin \theta \cos \phi & \mathbf{y} &= r \sin \theta \sin \phi & \mathbf{z} &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{Con } \rho = r \sin \theta$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES A ESFÉRICAS:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) & \phi &= \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 1er cuadrante} \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 2do cuadrante} \\ \pi + \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 3er cuadrante} \\ 2\pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 4to cuadrante} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Con } \rho = r \sin \theta$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A RECTANGULARES:

$$\mathbf{x} = \rho \cos \phi \quad \mathbf{y} = \rho \sin \phi \quad \mathbf{z} = z$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES A CILÍNDRICAS:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} & \phi &= \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 1er cuadrante} \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 2do cuadrante} \\ \pi + \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 3er cuadrante} \\ 2\pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 4to cuadrante} \end{cases} & z &= z \end{aligned}$$

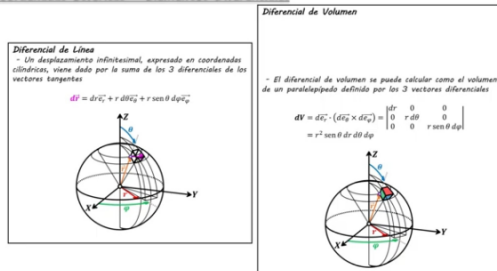
TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} & \theta &= \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{\rho}{z} \right| & \text{para } z > 0 \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{\rho}{z} \right| & \text{para } z < 0 \\ 0 & \text{para } z = 0 \end{cases} & \phi &= \phi \end{aligned}$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS:

$$\rho = r \sin \theta \quad \phi = \phi \quad z = r \cos \theta$$

Coordenadas Esféricas - Elementos Diferenciales



Si el Jacobiano fuera 0 sería cualquier otra: Físicamente como seríamos? R: estaríamos curvados, o los otros 8 sistemas coordenados.

Si Utilizamos las relaciones y triángulos rectángulos de los puntos 4 y 6 anteriores:



$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{De donde:} & \quad \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 1er cuadrante} \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 2do cuadrante} \\ \pi + \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 3er cuadrante} \\ 2\pi - \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{en el 4to cuadrante} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{De donde:} & \quad \begin{cases} \tan^{-1} \left| \frac{\rho}{z} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right| & \text{para } z > 0 \\ \pi - \tan^{-1} \left| \frac{\rho}{z} \right| = \pi - \tan^{-1} \left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right| & \text{para } z < 0 \\ 0 & \text{para } z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tendremos las ecuaciones de transformación requeridas:

$\phi = \text{Ángulo Azimutal}$
"No es mostrado en la figura 5-3"
 $\int_0^{2\pi} \phi d\phi = 2\pi$

Jacobiano en Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} \text{Aplicación Esféricas} \rightarrow \text{Cartesianas} & \quad \mathbf{F}([0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{F}(r, \theta, \phi) &= (x, y, z) \\ x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad \text{Matriz Jacobiano} \quad \begin{aligned} J_{\mathbf{F}}(r, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Determinante Jacobiano} & \quad \det(J_{\mathbf{F}}(r, \theta, \phi)) = r^2 \sin \theta \\ \text{El determinante Jacobiano es no negativo porque } \theta \in [0, \pi] & \text{ y para estos valores el } \sin \theta \geq 0 \\ \text{El determinante Jacobiano se anula para el conjunto } \Omega & \text{ que es unión de 3 conjuntos planos de intersección vacío} \\ \Omega &= ([0] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]) \cup ([0, \infty) \times [0] \times [0, 2\pi]) \cup ([0, \infty) \times [0, \pi] \times [0]) \\ \text{Se concluye que si } \Omega & \text{ es un conjunto acotado, contenido en el dominio de definición de } \mathbf{F}, \text{ entonces el Jacobiano de } \mathbf{F} \text{ en } \Omega \text{ es no nulo, salvo en un conjunto de volumen nulo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Usos Jacobiano} & \quad \text{Cambio de variable en integrales triples} \\ \iiint_{\mathbf{F}(\Omega)} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ \text{Cálculo del diferencial de volumen en esféricas} & \quad dV = 3 dr d\theta d\phi \\ J &= h_1 h_2 h_3 = r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Jacobiano en Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} \text{Determinante Jacobiano - Cálculo} & \quad \text{Forma 1} \rightarrow \text{Resolución del determinante} \\ \det(J_{\mathbf{F}}(r, \theta, \phi)) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} - (-r \sin \theta \sin \phi) \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta (r \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r \sin^2 \theta \sin^2 \phi) + r \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \theta \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Este es el Jacobiano en coordenadas esféricas pero también hay en cilíndricas. ¿Cuál es el Jacobiano en rectangulares? Respuesta: 1 ya que $\mathbf{F}(w,v) = (w,v,w)$

El 95% de los casos se usa ese resultado.

Podemos usar QUE ESTA INTEGRAL ES FSABLE PARA RESPONDER UN PROBLEMA EN EL EXAMEN

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} &= J = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por propiedad inversa: $J\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) J\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right) = 1$

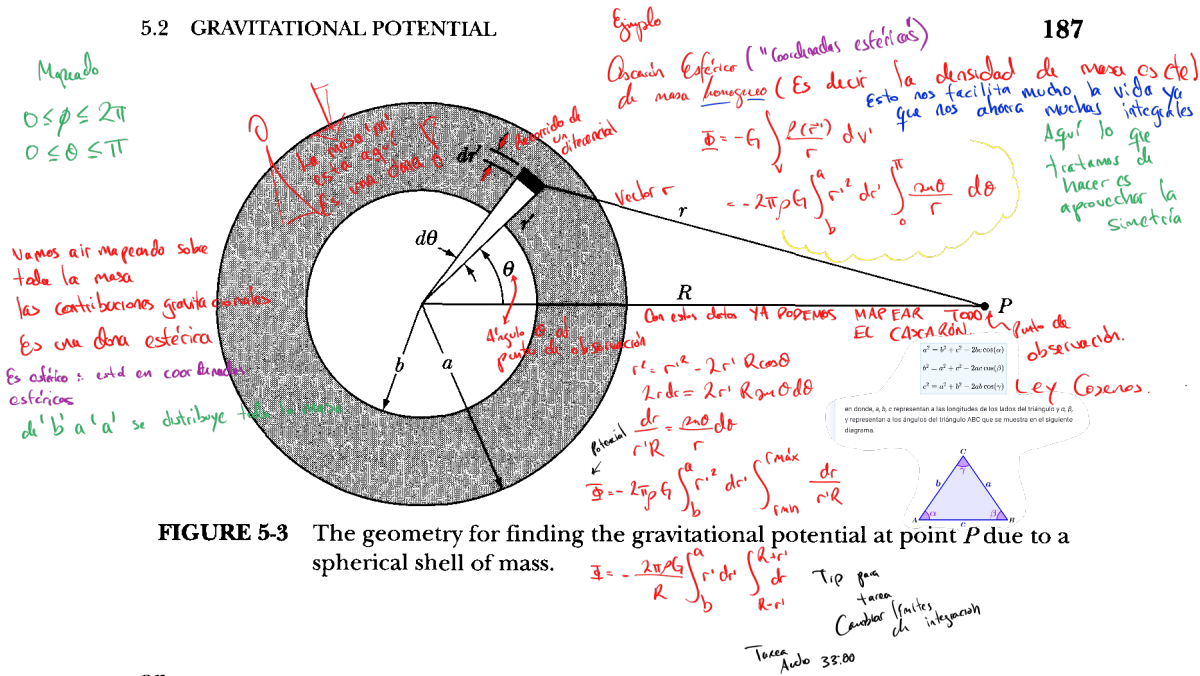


FIGURE 5-3 The geometry for finding the gravitational potential at point P due to a spherical shell of mass.

OR

$$\frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R} \quad (5.15)$$

Substituting this expression into Equation 5.13, we have

$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \quad (5.16)$$

The limits on the integral over dr depend on the location of point P . If P is *outside* the shell, then

$\Phi = -\frac{4\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr'$

$\Phi = -\frac{4}{3} \frac{\pi\rho G}{R} (a^3 - b^3)$

Este es el potencial que voy a tener para calcular un General.

$\Rightarrow \Phi(R > a) = -\frac{GM}{R}$

Tip from Tarea: Cambiar límites de Integración

Hay 3 cosas a analizar:
 1. $(R > a)$
 2. $(R < b)$
 3. $(b < R < a)$

$\Phi(R > a) = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr$

$= -\frac{4\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr'$

$= -\frac{4}{3} \frac{\pi\rho G}{R} (a^3 - b^3) \quad (5.17)$

But the mass M of the shell is

$= -4\pi\rho G \int_b^a r' dr'$

$M = \frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3) \quad (5.18)$

so the potential is

$$\Phi(R > a) = -\frac{GM}{R} \quad (5.19)$$

If the field point lies inside the shell, then

$$\Phi(R < b) = -2\pi\rho G(a^2 - b^2)$$

$$\begin{aligned}\Phi(R < b) &= -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr \\ &= -4\pi\rho G \int_b^a r' dr' \\ &= -2\pi\rho G(a^2 - b^2)\end{aligned}\quad (5.20)$$

The potential is therefore constant and independent of position inside the shell.

Finally, if we wish to calculate the potential for points *within* the shell, we need only replace the lower limit of integration in the expression for $\Phi(R < b)$ by the variable R , replace the upper limit of integration in the expression for $\Phi(R > a)$ by R , and add the results. We find

$$\begin{aligned}\Phi(b < R < a) &= -\frac{4\pi\rho G}{3R}(R^3 - b^3) - 2\pi\rho G(a^2 - R^2) \\ &= -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right)\end{aligned}\quad (5.21)$$

We see that if $R \rightarrow a$, then Equation 5.21 yields the same result as Equation 5.19 for the same limit. Similarly, Equations 5.21 and 5.20 produce the same result for the limit $R \rightarrow b$. The potential is therefore *continuous*. If the potential were not continuous at some point, the gradient of the potential—and hence, the force—would be infinite at that point. Because infinite forces do not represent physical reality, we conclude that realistic potential functions must always be continuous.

Note that we treated the mass shell as homogeneous. In order to perform calculations for a solid, massive body like a planet that has a spherically symmetric mass distribution, we could add up a number of shells or, if we choose, we could allow the density to change as a function of radius.

The results of Example 5.1 are very important. Equation 5.19 states that the potential at any point outside of a spherically symmetric distribution of matter (shell or solid, because solids are composed of many shells) is independent of the size of the distribution. Therefore, to calculate the external potential (or the force), we consider all the mass to be concentrated at the center. Equation 5.20 indicates that the potential is constant (and the force zero) anywhere inside a spherically symmetric mass shell. And finally, at points within the mass shell, the potential given by Equation 5.21 is consistent with both of the previous results.

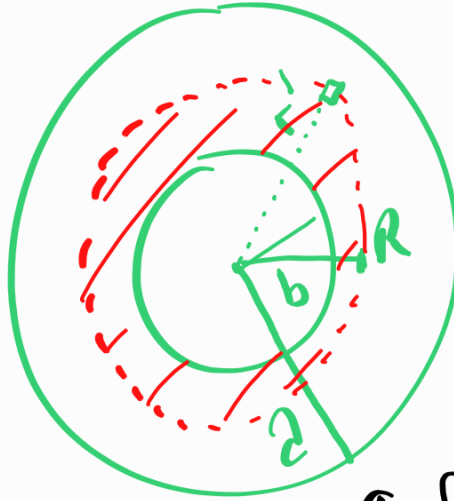
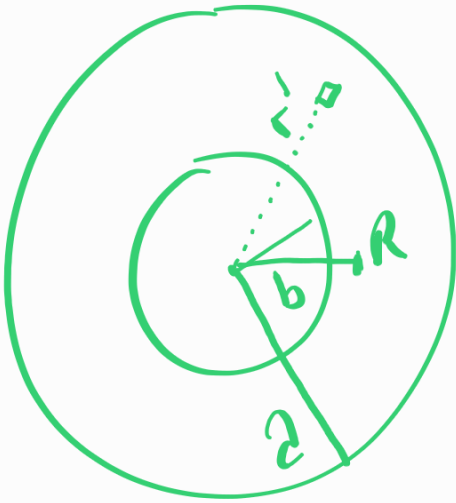
The magnitude of the field vector $\mathbf{g}$ may be computed from $g = -d\Phi/dR$ for each of the three regions. The results are

$$\left. \begin{aligned}g(R < b) &= 0 \\ g(b < R < a) &= \frac{4\pi\rho G}{3}\left(\frac{b^3}{R^2} - R\right) \\ g(R > a) &= -\frac{GM}{R^2}\end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Estas son las} \\ \text{aceleraciones} \\ \text{abajo viene como} \\ \text{sacarlos.} \end{array} \quad (5.22)$$

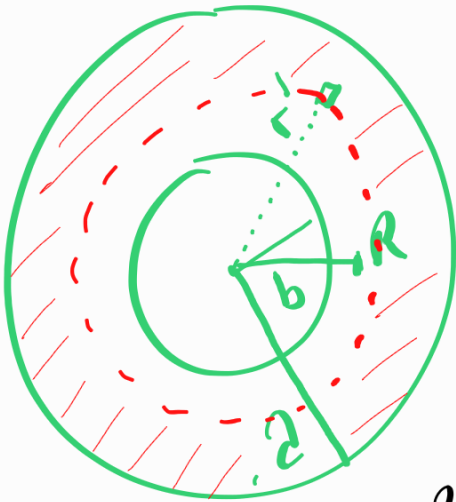
17 Mayo 23

TAREA:

$\Phi(b < R < a)$



$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr dr'$$



$$= -\frac{2\pi\rho G}{R} \left[\int_b^R r' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr dr' + \int_R^a r' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr dr' \right]$$

$$= -\frac{2\pi\rho G}{R} \left[\int_b^R r' \int_{R-r'}^{R+r'} dr dr' + \int_R^a r' \int_{r'-R}^{r'+R} dr dr' \right]$$

$\underbrace{R+r'-(R-r')}_{=2r'}$
 $\underbrace{r'+R-(r'-R)}_{=2R}$

$$= -\frac{2\pi\rho G}{R} \left[\int_b^R \underbrace{2r'^2}_{\frac{2r'^3}{3} \Big|_b^R} dr' + \int_R^a \underbrace{2Rr'}_{2R \frac{r'^2}{2} \Big|_R^a} dr' \right]$$

$$= -\frac{2\pi\rho G}{R} \left[\frac{2}{3} (R^3 - b^3) + R (a^2 - R^2) \right]$$

$\Phi(b < R < a)$

Algo interesante pasa cuando $R \rightarrow a$:

$$\lim_{R \rightarrow a} \left(-\frac{2\pi\rho G}{R} \left(\frac{2}{3}(R^3 - b^3) + R(a^2 - R^2) \right) \right) = -\frac{2\pi\rho G}{a} \left(\frac{2}{3}(a^3 - b^3) \right)$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{\pi\rho G}{a} (a^3 - b^3) = -\frac{GM}{a}$$

check $M = \frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3)$

Hagamos a lo mismo, es invariante
 ← Esto ya lo habíamos sacado.
 A la física le vale como hagamos la matemática es invariante, va a salir lo mismo.

Ahora hacemos cuando $R \rightarrow b$:

$$\lim_{R \rightarrow b} \Phi = -\frac{2\pi G}{R} \left[\frac{2}{3}(R^3 - b^3) + R(a^2 - R^2) \right]$$

$$= -\frac{2\pi\rho G}{b} [b(a^2 - b^2)] = -2\pi\rho G(a^2 - b^2)$$

II AHORA LAS ACELERACIONES:

Cuando abusábamos de la notación:
 Dijimos que ibamos a usar esto para olvidarnos de las unidades de masa

$$F = -\nabla\Phi \quad (\text{Gradiente del Potencial}) \quad \text{Ver Ec. 5.12}$$

$$g = -\nabla\Phi$$

Ahora vamos con:

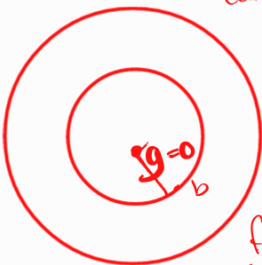
$$\Phi(R > a) = -\frac{GM}{R}$$

Solo derivamos:

$$g = -\frac{GM}{R^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Esta es la aceleración} \\ \text{fura del cascaron.} \end{array} \right.$$

$$\Phi(R < b) = -2\pi\rho G(a^2 - b^2)$$

$$g = 0$$



¿Cuál es la derivada de esto?

$$g = 0$$

¿Porque? Porque el potencial es una cte.

En un planeta con forma de donut flotamos en el centro.

Analogía
 Electromagnetismo

Divergencia del Campo Eléctrico Ec. Gauss



$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

En su forma integral:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int \rho dv$$

si eso es cero NO HAY CARGA ENCERRADA

Seguimos:

$$\Phi(b < R < a)$$

$$= -\frac{2\pi\rho G}{R} \left[\frac{2}{3}(R^3 - b^3) + R(a^2 - R^2) \right]$$

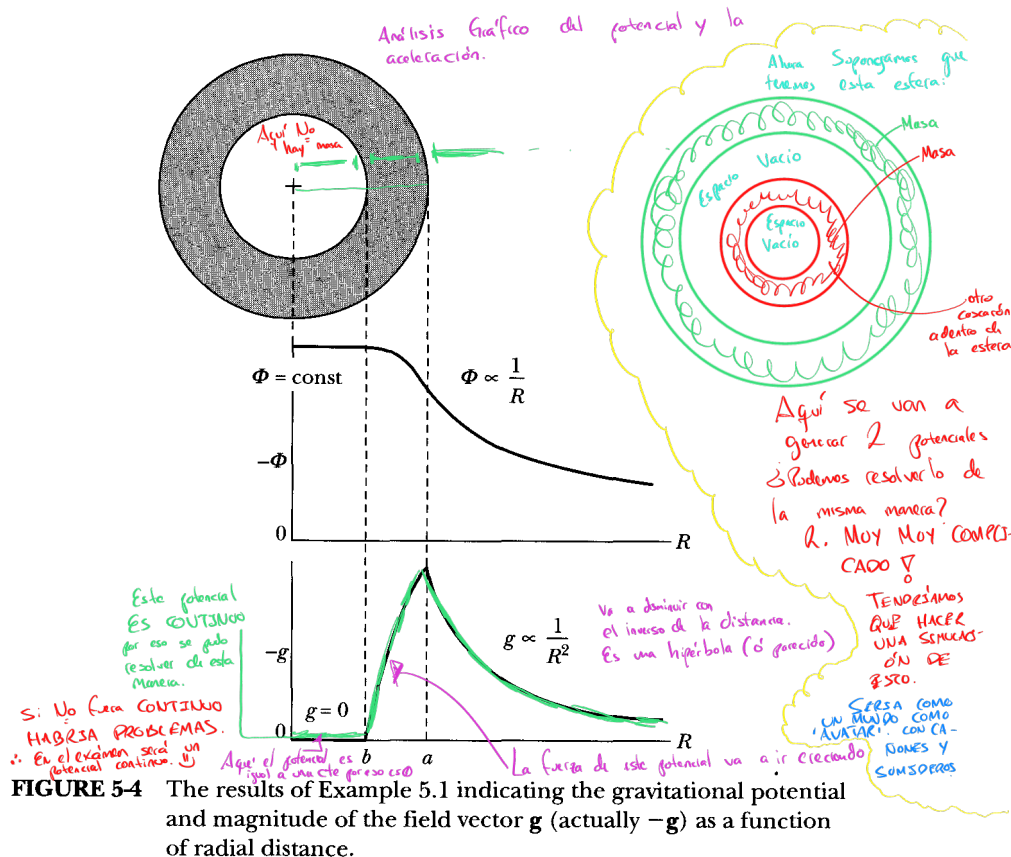
Esto muy complicado para derivar ::
 tenemos R

$$= -\frac{2\pi\rho G}{R} \left[\frac{2}{3} \left(R^2 - \frac{b^3}{R} \right) + (a^2 - R^2) \right]$$

$$= -2\pi\rho G \left[\frac{2}{3} \left(2R + \frac{b^3}{R^2} \right) - 2R \right]$$

Es lineal en una derivada

$$= -\frac{4\pi\rho G}{3} \left[2R + \frac{b^3}{R^2} - 3R \right] = -\frac{4\pi\rho G}{3} \left[\frac{b^3}{R^2} - R \right]$$



We see that not only the potential but also the field vector (and hence, the force) are continuous. The *derivative* of the field vector, however, is not continuous across the outer and inner surfaces of the shell.

All these results for the potential and the field vector can be summarized as in Figure 5-4.

EXAMPLE 5.2

Astronomical measurements indicate that the orbital speed of masses in many spiral galaxies rotating about their centers is approximately constant as a function of distance from the center of the galaxy (like our own Milky Way and our nearest neighbor Andromeda) as shown in Figure 5-5. Show that this experimental result is inconsistent with the galaxy having its mass concentrated near the center of the galaxy and can be explained if the mass of the galaxy increases with distance R .

Solution. We can find the expected orbital speed v due to the galaxy mass M that is within the radius R . In this case, however, the distance R may be hundreds of light years. We only assume the mass distribution is spherically symmetric. The gravitational force in this case is equal to the centripetal force due to the

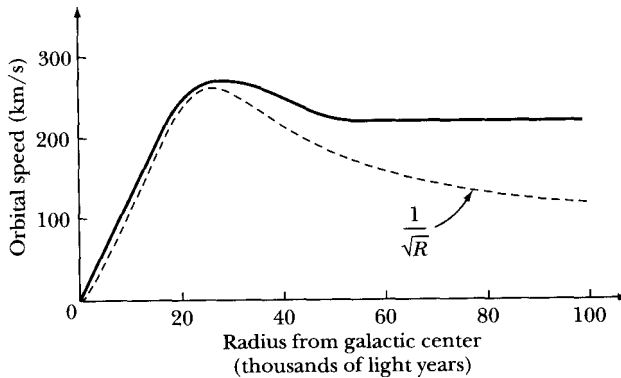


FIGURE 5-5 Example 5.2. The solid line represents data for the orbital speed of mass as a function of distance from the center of the Andromeda galaxy. The dashed line represents the $1/\sqrt{R}$ behavior expected from the Keplerian result of Newton's laws.

mass m having orbital speed v :

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{R}$$

We solve this equation for v :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

If this were the case, we would expect the orbital speed to decrease as $1/\sqrt{R}$ as shown by the dashed line in Figure 5-5, whereas what is found experimentally is that v is constant as a function of R . This can only happen in the previous equation if the mass M of the galaxy itself is a linear function of R , $M(R) \propto R$.

Astrophysicists conclude from this result that for many galaxies there must be matter other than that observed, and that this unobserved matter, often called “dark matter,” must account for more than 90 percent of the known mass in the universe. This area of research is at the forefront of astrophysics today.

EXAMPLE 5.3

19-1140-2023

Consider a thin uniform circular ring of radius a and mass M . A mass m is placed in the plane of the ring. Find a position of equilibrium and determine whether it is stable.

Solution. From symmetry, we might believe that the mass m placed in the center of the ring (Figure 5-6) should be in equilibrium because it is uniformly surrounded by mass. Put mass m at a distance r' from the center of the ring, and place the x -axis along this direction.

Todo sobre Vectores y Análisis vectorial en Física

Mediante el análisis vectorial nos enfocaremos en estudiar, comprender y analizar a los vectores desde el punto de vista de la física, conoceremos qué son, cuáles son sus partes, así como los tipos de vectores que existen y por si fuera poco, pasaremos a desarrollar las operaciones que se usan en el análisis vectorial.

Contenidos [ocultar]

1 Definición de vector en física

2 Magnitudes vectoriales

3 Representación de un vector

4 Elementos de un vector

4.1 Punto de aplicación

4.2 Módulo

4.3 Sentido

4.4 Línea de acción

4.5 Dirección

5 Tipos de los vectores

5.1 Vectores colineales

5.2 Vectores coplanares

5.3 Vectores concurrentes

5.4 Vectores iguales

5.5 Vectores opuestos

5.6 Vector unitario

6 Vectores en el plano cartesiano R2 y en el espacio R3

7 Vectores en el plano R2

7.1 Componentes rectangulares de un vector

7.2 Vectores unitarios rectangulares

8 Vectores en el espacio R3

8.1 Módulo de un vector en el espacio tridimensional

8.2 Cosenos directores de un vector en R3

8.3 Vectores unitarios en R3

9 Producto de un vector por un escalar

10 Operaciones con vectores

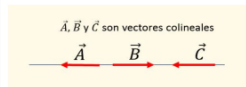
11 Aplicaciones de vectores en física

5. Tipos de vectores

Los vectores se clasifican en varios tipos, de acuerdo a la forma en la que se presentan, conocerlas es importante, ya que en la resolución de ejercicios de vectores, no encontraremos con estos e identificarlas aportara en su solución. Veamos cuales son:

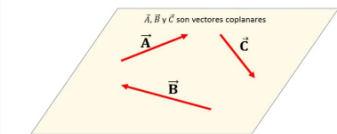
Vectores colineales

Dos o más vectores son colineales cuando tienen la misma línea de acción, sin importar el sentido que tomen, siempre y cuando se encuentren en la misma línea de acción.



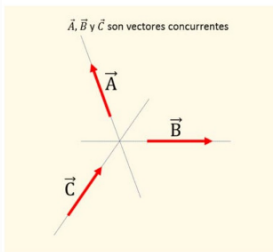
Vectores coplanares

Los vectores coplanares son aquellos que se encuentran sobre un mismo plano, sin importar sus direcciones ni sentidos.



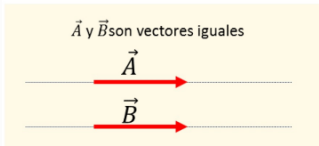
Vectores concurrentes

Se dice que dos o más vectores son concurrentes cuando sus líneas de acción se intersectan o concurren en un mismo punto. Para ver si los vectores son concurrentes puedes proyectar sus líneas de acción.



Vectores iguales

Cuando dos o más vectores poseen el mismo módulo, la misma dirección y sentido, entonces se dice que son vectores iguales.

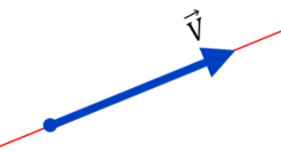


6. Vectores en el espacio cartesiano R2 y espacio R3

Los vectores se pueden analizar en el plano cartesiano, ya sea en un plano de dos ejes X y Y, como vectores en el plano R2 o en el espacio tridimensional con ejes X, Y y Z, como vectores en el espacio R3, el comportamiento es similar, solo que en tres dimensiones los vectores se consideran con tres componentes. Veamos mejor a continuación para evitar dudas.

1. Definición de Vector en física.

Un vector en física, se define como un ente matemático, que se puede representar gráficamente mediante un segmento de recta orientado, es decir mediante una flecha que indica el sentido del vector, parte de un punto y termina en otro. Un vector es un elemento matemático, así como lo son: el punto, la recta, y el plano.



El vector es un elemento que representa una magnitud física de tipo vectorial, a partir de ella se pueden obtener varios datos sobre el comportamiento de un fenómeno físico como la velocidad, aceleración, fuerza, etc.

Antes de empezar estableceremos las diferencias entre las magnitudes fundamentales y derivadas.

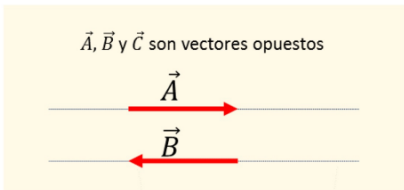
2. Magnitudes Vectoriales

Las magnitudes físicas vectoriales son las que poseen dirección y sentido; es decir para que queden expresadas completamente, se necesita establecer su módulo, dirección y sentido. Por ejemplo, la velocidad es una magnitud vectorial, porque cuando expresamos velocidad de un móvil, es necesario indicar la dirección y sentido de dicho movimiento para que la información sea completamente entendible.



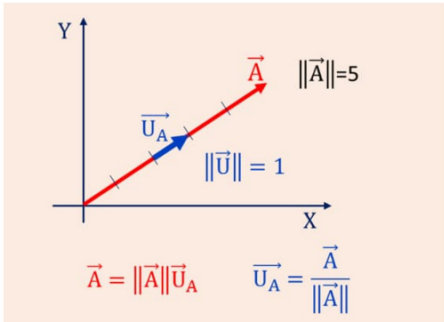
Vectores opuestos

Dos vectores son opuestos, cuando poseen la misma dirección pero sentidos opuestos ejemplo el vector opuesto de (3i+2j) será (-3i-2j).



Vector unitario

El vector unitario es aquel que tiene como módulo a la unidad, el objetivo de un vector unitario es indicar la dirección y sentido de un vector determinado.

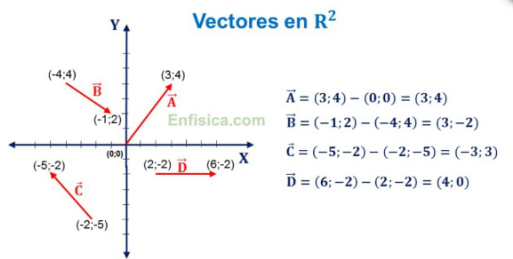


Si se tiene como dato al vector unitario de un vector cuyo modulo es conocido, entonces podemos calcular el vector multiplicando su módulo por su vector unitario.

7. Vectores en el espacio R2

Un vector puede estar ubicado en cualquier posición dentro del plano cartesiano R2, puede tomar cualquier punto como origen, así como su punto final, además los vectores siempre poseen una dirección y sentido, y en este caso tendrán dos componentes (X,Y), la misma que desarrollaremos más adelante.

Cundo disponemos del punto final y el punto de origen del vector, podemos calcular rápidamente el vector formado; simplemente debemos restar el punto final menos el punto de origen.



3. Representación de un vector

Un vector se representa gráficamente mediante una flecha, sin embargo para expresar en enunciados o problemas a resolver se suele emplear una letra mayúscula o minúscula con una flecha sobre ella, así como aparece en la figura anterior. Un vector también puede estar expresada en sus componentes rectangulares, la misma que conoceremos más adelante.

4. Elementos de un vector

El vector posee elementos que ayudan representarlo y entender de la mejor manera posible, veamos cuales son y en qué consisten.

Punto de aplicación

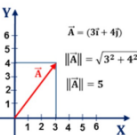
Un vector tiene un punto de aplicación, llamado también como punto de origen, este se encuentra dentro del sistema de coordenadas o también llamado espacio euclidiano, se ubica en un punto con sus respectivas coordenadas.

Módulo

Conocido también como magnitud (tamaño), el módulo es el valor del vector y de acuerdo al tipo de magnitud que representa, esta tendrá sus unidades de medida, por ejemplo cuando se trata de un vector posición su unidad puede estar expresado en metros, o si se trata de un vector velocidad, su unidad puede ser en m/s.

El módulo de un vector se representa con barras dobles y su valor es un número con unidades, ejemplo: ||V|| = 5 unidades

Cuando un vector se presenta con sus respectivas componentes, ya sea en el plano bidimensional o tridimensional, su módulo será la raíz cuadrada de la suma total del cuadrado de sus componentes. Por ejemplo:



Sentido

El sentido de un vector esta dada por la orientación que posee dentro de su línea de acción, se representa mediante una flecha que indica el sentido, un vector puede tomar solo uno de dos sentidos en una misma línea de acción.

Línea de acción

Es la línea imaginaria donde se encuentra completamente el vector, sobre dicha línea, el vector se puede mover sin cambiar su dirección y sentido. Desplazar vectores sobre su línea de acción, es bastante útil cuando se analizan magnitudes como la fuerza resultante sobre un cuerpo.

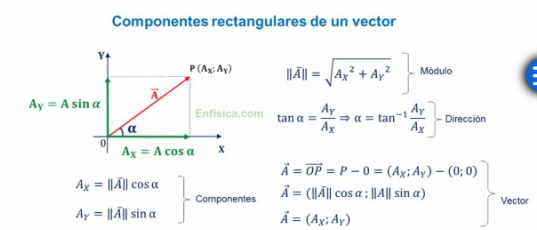
Dirección

La dirección de un vector está dado por el grado de inclinación de la línea de acción del vector respecto a un eje coordenado, generalmente el eje X positivo. La dirección se expresa mediante el ángulo que forma la línea de acción con el eje positivo horizontal X.

7.1

Componentes rectangulares de un vector

En el plano cartesiano bidimensional podemos representar las componentes rectangulares que posee un vector:

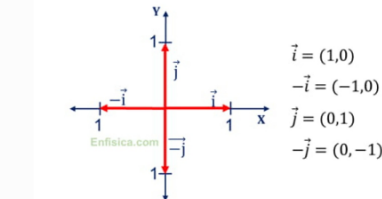


El módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma total de los cuadrados de sus componentes.

7.2 Vectores unitarios rectangulares

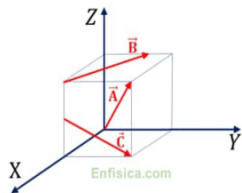
Los vectores unitarios rectangulares son prácticamente los vectores unitarios de los ejes cartesianos.

- Todos los vectores horizontales, es decir paralelos al eje X poseen un vector unitario a (1;0) si tienen sentido positivo y (-1;0) si tienen sentido negativo; el vector unitarios con dirección X se representa con la letra «i» con su respectivo signo.
- Los vectores paralelos al eje Y con sentido positivo tienen como vector unitario a (0;1) y los que tienen sentido negativo tienen como vector unitario a (0;-1); el vector unitario con dirección Y se representa mediante la letra «j» con su respectivo signo.

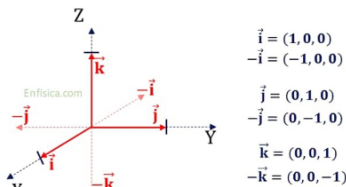


8. Vectores en el espacio R^3

Los vectores también pueden analizarse en el espacio tridimensional, sucede de manera similar que en el plano cartesiano, pero en R^3 , los vectores poseen tres componentes: X, Y y Z, vemos cómo se ve un vector cuyo origen o punto de aplicación coincide con el origen de coordenadas.

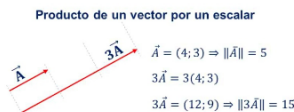


Los vectores unitarios de los ejes coordenados son similares como en el plano cartesiano, pero en R^3 tendrán tres componentes de las cuales uno de ellos toma el valor de la unidad y los demás cero, dependiendo de la dirección y sentido que toma:



9. Producto de un vector por un escalar.

Multiplicar un vector por un escalar, es decir por un número; hace que el módulo del vector se multiplique el número de veces que indica el escalar, por lo tanto, el resultado es un vector cuya dirección es la misma pero su módulo cambia.



Por ejemplo, si multiplicamos por 3 al vector (2i+3j) el resultado será: (6i+9j).

10. Operaciones con vectores

Ahora aprenderemos las operaciones de suma y diferencia de vectores, aunque hablando de operaciones deberíamos denominarlas como adición y sustracción, dos operaciones bastante básicas que se pueden realizar con vectores, ya sea empleando métodos gráficos o métodos analíticos.

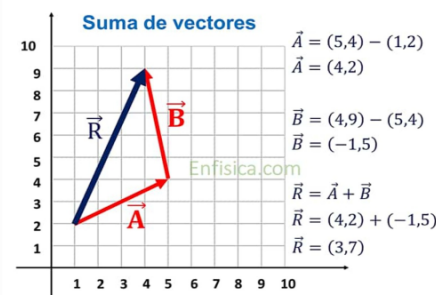
Contenidos	[ocultar]
10.1	Suma de vectores
10.1.1	Ejemplo de suma de vectores
10.2	Suma de vectores paralelos
10.3	Método del paralelogramo
10.4	Método del triángulo
10.5	Método del polígono
10.6	Diferencia de vectores

10.1 Suma de vectores

Dos o más vectores pueden ser sumados para obtener otro vector que produzca el mismo efecto final que los vectores a sumar juntos. Cuando los vectores están expresados en sus componentes, sumarlos es tan simple como sumar dichos componentes respetando la regla de signos. El resultado de sumar vectores es conocido como **vector resultante**.

Ejemplo de suma de vectores

En el gráfico a continuación se muestra dos vectores A y B en el plano cartesiano, el vector R es el vector resultante después de sumar A y B.



Podemos notar gráficamente como se suman los vectores, de manera similar ocurre cuando se trata de sumar varios vectores. En el espacio tridimensional sucede de igual manera, con la única diferencia de que los vectores tienen tres componentes. Veamos.

Ejemplo: hallar el vector resultante de los vectores A, B y C.

- A = (2,-4,3)
- B = (-1,0,-5)
- C = (7,4,2)

El vector resultante será: $R = (2-1+7, -4+0+4, 3-5+2) \Rightarrow R = (8,0,0)$

Existen varias formas o métodos para sumar vectores, podemos hacer analíticamente o si disponemos de los gráficos podemos emplear los métodos gráficos, veamos.

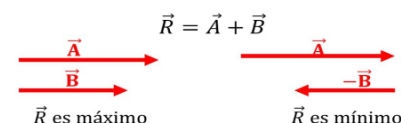
10.2 Suma de Vectores Paralelos

Dos o más vectores son paralelos cuando sus líneas de acción poseen la misma dirección, aunque sus posiciones en el espacio pueden ser diferentes. Podemos decir que los vectores colineales son paralelos, pero no necesariamente los vectores paralelos son colineales.

Si tenemos dos vectores A y B paralelos, entonces:

- La suma o resultante de dichos vectores será máxima cuando el ángulo formado por ellos sea de 0 grados, o podemos decir cuando poseen el mismo sentido.
- La resultante será mínima cuando el ángulo formado entre ellos sea de 180 grados, o si quieres entender de otra manera, cuando tengan sentidos opuestos.

Te recomendamos leer: [Producto cruz de vectores](#)



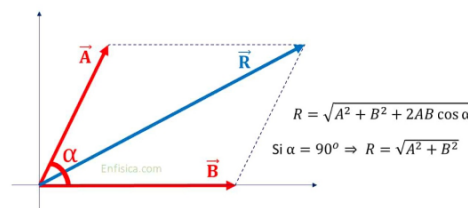
10.3 Método del Paralelogramo

El método del paralelogramo sirve para hallar el módulo de la resultante de dos vectores que poseen un mismo origen, por ende son vectores concurrentes y coplanares. Para entender mejor, representemos dos vectores A y B, el vector resultante o suma de dichos vectores será el vector R.

El nombre de este método se debe a la forma que resulta de gráfica los vectores y sus respectivas paralelas, pues forman la figura geométrica de un paralelogramo.

Para dibujar correctamente el método del paralelogramo debemos seguir los siguientes pasos:

- Hacer coincidir el punto de origen de los vectores A y B,
- Trazar una línea paralela al vector A, que pase por el punto final del vector B.
- Trazar otra línea paralela al vector B y que pase por el punto final del vector A.
- Dibujar el vector resultante, su punto de origen coincide con el origen de los vectores A y B y su punto final coincide con la intersección de las líneas trazadas en los pasos 2 y 3.
- Para medir el módulo del vector resultante R se puede emplear una cinta métrica o regla.
- Para medir su la dirección de R se puede emplear un transportador.



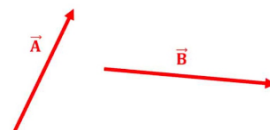
La gracia de emplear métodos gráficos, es que es posible calcular la magnitud de un vector haciendo uso de escalas y herramientas, como una regla métrica y transportador, aunque también es posible hacerlo analíticamente haciendo uso de la fórmula.

10.4 Método del Triángulo

El método del triángulo se usa para hallar la resultante de dos vectores cualquiera, el procedimiento es parecido al método del paralelogramo, pero en este caso se desplaza uno de los vectores a continuación del otro sin cambiar su magnitud ni dirección; después de ello se traza el vector resultante, la misma que va desde el origen del primer vector hasta el final del segundo vector.

Te recomendamos leer: [Producto interno o punto de vectores](#)

Para entender mejor, nos ayudaremos de un gráfico; tenemos dos vectores A y B, no piden hallar la resultante empleando el método del triángulo, veamos.



Pasos para sumar vectores con el método del triángulo

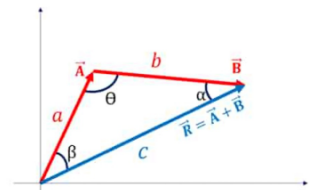
- Desplazamos uno de los vectores a continuación de la otra, sin alterar su dirección ni magnitud.
- Trazamos el vector resultante que va desde el origen del primer vector, hasta el final del vector que le sigue.
- Medimos el módulo y dirección de la resultante haciendo uso de regla métrica y transportador respectivamente, o en su defecto podemos calcular analíticamente.

Debe quedar claro que cuando se desplaza un vector a continuación de otro, nos referimos a que el origen del vector segundo vector debe coincidir con el final del primer vector.

Pasos para sumar vectores con el método del triángulo

- Desplazamos uno de los vectores a continuación de la otra, sin alterar su dirección ni magnitud.
- Trazamos el vector resultante que va desde el origen del primer vector, hasta el final del vector que le sigue.
- Medimos el módulo y dirección de la resultante haciendo uso de regla métrica y transportador respectivamente, o en su defecto podemos calcular analíticamente.

Debe quedar claro que cuando se desplaza un vector a continuación de otro, nos referimos a que el origen del vector segundo vector debe coincidir con el final del primer vector.



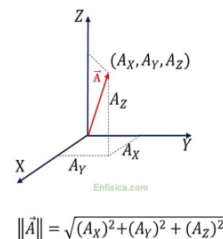
Además, geométricamente se cumple la ley de Senos:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta}$$

Por otro lado, también podemos aplicar la ley de senos que se cumple en los triángulos para calcular el módulo de cualquiera de sus lados, en este caso de los vectores que lo componen.

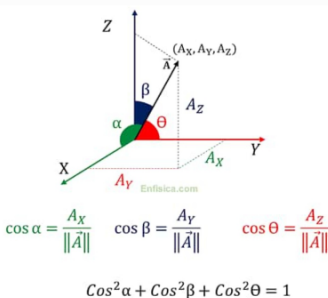
Módulo de un vector en el espacio tridimensional

El módulo de un vector posicionado en cualquier parte del espacio tridimensional se calcula de manera similar que en el plano cartesiano; en este caso será igual a la raíz cuadrada de la suma total de los cuadrados de sus componentes.



Cosenos directores de un vector en R^3

Un vector en R^3 formará un ángulo con los ejes coordenados, en este caso se formarán tres ángulos en total con el eje X, Y y Z. dichos ángulos serán: α , β y θ respectivamente, estos definen la dirección del vector en 3D, observa la imagen para entender mejor.



Además se cumple que la suma de los cuadrados del valor de los cosenos es igual a la unidad.

Vectores unitarios en R^3

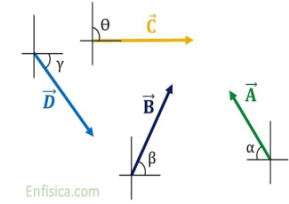
El vector unitario de un vector cualquiera es el vector dividido entre su módulo, en este caso coincide con los cosenos directores del vector:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \\ \vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \\ \vec{u}_A = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \theta \vec{k})$$

10.5 Método del Polígono

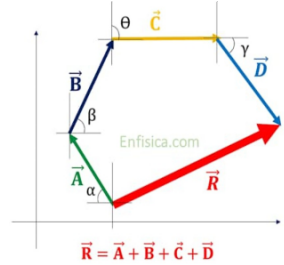
El método del polígono es un método similar al método del triángulo, pero en este caso nos sirve para sumar más de dos vectores, se trata de desplazar los vectores a sumar uno a continuación de otro sin cambiar su dirección ni módulo, al final se traza el vector resultante que va desde el origen del primer vector hasta el punto final del último vector, el resultado será un polígono.

En la imagen tenemos 4 vectores todas con una magnitud y dirección determinada, debemos hallar el vector resultante, es decir la suma de los 4 vectores, lo haremos mediante el método del polígono, veamos.



Pasos para aplicar el método del paralelogramo

- Empezaremos desplazando vectores uno a continuación de otro, no importa el orden, es posible elegir a cualquiera para que sea el punto de partida.
- Es importante no modificar las direcciones ni magnitudes, simplemente hay que desplazarlas tal como están.
- Verificamos que todos los vectores del sistema están unidos.
- Finalmente trazamos el vector resultante, que va del origen del primer vector al final del último vector colocado.
- Medimos el módulo y dirección del vector resultante, empleando una regla métrica y transportador respectivamente.



Método del polígono para sumar vectores.

Cualquiera puede ser el primer vector y cualquiera puede seguir a continuación, al final siempre se consigue el mismo vector resultante, puede probar si desea.

Cuando después de desplazar y unir los vectores, el punto de origen o partida del primer vector coincide con el punto final del último vector, entonces no se puede trazar un vector resultante, en este caso la resultante será cero 0. Ya que los vectores formaron un polígono cerrado.

10.6 Diferencia de Vectores

La diferencia entre vectores es básicamente similar a la suma de vectores, solo que en este caso los vectores se restan, el vector que sustrahe tiene signo negativo que es repartido a cada componente de dicho vector, luego las operaciones se realizan como respetando los signos.

Por ejemplo, si tenemos el vector A y B, el vector diferencia será D= A-B, veamos:

- A=(3,5,1)
- B=(-1,7,12)

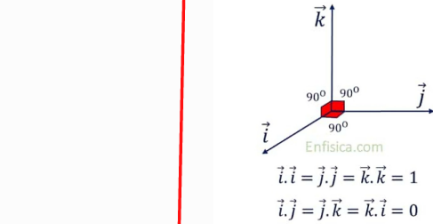
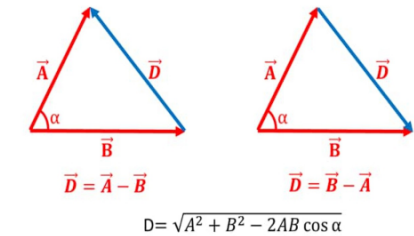
D=A-B

=> D=(3,5,1) - (-1,7,12)

=> D=(3-(-1), 5-7, 1-(-12))

=> D=(4,-2,13)

Gráficamente podemos observar a continuación, además cuando el ángulo formado es agudo se cumple la ley de cosenos y es posible aplicar la fórmula que aparece.



• Producto Punto

Contenidos	[ocultar]
1	Producto punto de vectores
1.1	Fórmula del producto interno
2	Interpretación geométrica
3	Propiedades del producto punto
4	Producto escalar de vectores unitarios canónicos
5	Producto punto de suma y diferencia de vectores

• 1 Producto punto de vectores

El producto punto de vectores también es conocida como producto interno o producto escalar de vectores; es una operación que consiste en multiplicar dos vectores, dando como resultado un escalar, esta es una de las razones por las que también es llamado como producto escalar. Para representar esta operación se hace uso del punto, de ahí su nombre es producto punto.

Posiblemente la curiosidad te lleve a preguntar ¿Por qué esta operación o cual es su aplicación? pues existen algunos fenómenos físicos tales como el trabajo mecánico o el flujo magnético que presentan un comportamiento descrito por el producto punto.

Fórmula del producto interno

Dado dos vectores A=(Ax, Ay, Az) y B=(Bx, By, Bz), el producto punto entre ellos es igual a la suma total de los productos entre sus componentes. Es decir A.B=(Ax.Bx + Ay.By + Az.Bz) mejor veamos la imagen, donde se aprecia mejor la forma del producto interno.

A = (Ax, Ay, Az)
B = (Bx, By, Bz)

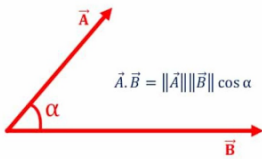
A.B = (Ax.Bx + Ay.By + Az.Bz)

Por ejemplo si tenemos los vectores A=(3, -5, 9) y B=(-4, 2, 7), el producto interno será:

- => A.B = (3.(-4) + (-5).2 + 9.7)
- => A.B = (-12 -10+ 63)
- => A.B = (41)

Te recomendamos leer: [Producto cruz de vectores](#)

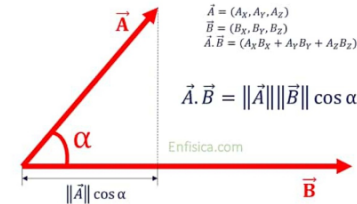
Otra forma de hallar el producto punto de dos vectores es multiplicando el módulo de dichos vectores por el coseno del ángulo que forman:



• 2 Interpretación geométrica

Cuando realizamos la operación de producto punto entre dos vectores, lo que estamos haciendo es multiplicar el módulo de uno de ellos por el módulo del otro en la dirección de la primera.

En la imagen podemos observar claramente que el producto punto es igual a módulo del vector B multiplicado por el módulo de la componente del vector A en dirección del vector B.



• 3 Propiedades del producto punto

Las propiedades del producto interno nos ayudarán a simplificar ciertas operaciones entre vectores, se trata de propiedades que se cumplen siempre, por ende será de bastante ayuda al momento de resolver problemas; pero es que además, detrás de cada propiedad existe una explicación, un significado físico, sin embargo para nuestro objetivo es suficiente con mencionárselas.

Producto punto o escalar

Sean los vectores A, B y C en R^3 y los escalares p y r.

A.B = B.A
A.A = A^2
(pA).B = p(A.B)
(A+B).C = A.C + B.C
Si A perpendicular B then A.B = 0

• 4 Producto escalar de vectores unitarios canónicos

Ya que el módulo de los vectores canónicos es la unidad, además dicho vector posee la unidad como uno de sus componentes, siendo los demás componentes igual a cero, se cumple que:

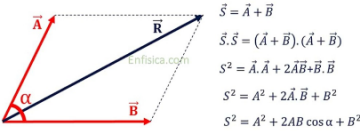
El producto punto de dos vectores canónicos iguales es la unidad elevada al cuadrado, lo que resulta la misma unidad.

Si nos fijamos las propiedades, el producto punto de vectores que forman un ángulo recto de 90 grados, siempre es cero, lo mismo ocurre con los vectores canónicos diferentes, pues siempre forman un ángulo recto.

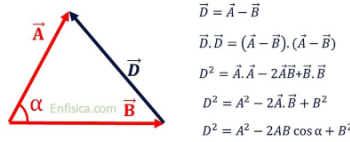
• 5

Si hacemos cumplir las propiedades mencionadas para el producto punto, podemos notar que se cumple lo que en la lección anterior conocimos como el método del paralelogramo, la misma que nos servía para sumar dos vectores, además el resultado de desarrollar la operación, resulta en la famosa ley de cosenos, veamos:

Te recomendamos leer: [Suma y diferencia de vectores](#)



Lo mismo ocurre cuando hacemos cumplir las propiedades para la diferencia de vectores, notaremos que se cumple la ley de cosenos, en este caso para hallar dicha diferencia, es similar al caso anterior, pero en este el signo cambia por ser una diferencia. Veamos la imagen:



X Producto Cruz

Ahora aprenderemos todo sobre el producto cruz de dos vectores o también conocido como producto vectorial, se trata de una operación vectorial y hoy aprenderemos en qué consiste, su interpretación geométrica, su significado, además de las propiedades que se cumplen en torno al producto cruz.

Contenidos	[ocultar]
1	Producto vectorial de dos vectores
1.1	Como hacer un producto cruz
1.2	Fórmula del producto cruz o vectorial
2	Interpretación geométrica del producto vectorial
3	La regla de la mano derecha
4	Propiedades del producto vectorial o cruz
5	Producto cruz de vectores unitarios canónicos

XI Producto vectorial de 2 vectores

El producto vectorial entre dos vectores A y B, es una operación cuyo resultado es otro vector C perpendicular a los vectores A y B o al plano que contiene a dichos vectores, por lo tanto esta operación se puede representar en el espacio tridimensional, como veremos más adelante.

Como hacer un producto cruz

Para hallar el producto cruz entre los vectores A=(A1, A2, A3) y B=(B1, B2, B3), se recurre a una matriz de dos filas y tres columnas, en la primera fila van las componentes del primer vector, y en la segunda fila las componentes del segundo vector, una vez ubicada dichos componentes se procede a realizar la operación; es tan sencillo como multiplicar y sumar o restar de acuerdo a la fórmula que presentamos, debemos tomar en cuenta siempre los signos de las componentes independientemente de la fórmula

El vector producto cruz AxB será igual a: (A2.B3 - A3.B2, -(A1.B3 - A3.B1), A1.B2 - A2.B1). Como puedes notar se trata de multiplicar componentes y restar otras. Para que entiendas de mejor manera observa la imagen, en ella tenemos dos vectores, se colocan sus componentes en la matriz y se realiza la operación:

PRODUCTO VECTORIAL

Dado los vectores A = A1i + A2j + A3k y B = B1i + B2j + B3k

A x B = | i j k |
| A1 A2 A3 |
| B1 B2 B3 |

A x B = (A2B3 - A3B2)i - (A1B3 - A3B1)j + (A1B2 - A2B1)k

Nota que para hallar una componente del resultado final o del producto cruz, se omite una fila, dicha fila coincide con la componente que se desea hallar, y los restantes se multiplican en aspa y los resultados de dicha multiplicación se restan, el resultado de multiplicar hacia abajo menos el resultado de multiplicar hacia arriba.

Te recomendamos leer: [Suma y diferencia de vectores](#)

Por ejemplo:

- Para hallar la componente en X del producto vectorial, se omite las componentes A1 y B1 de los vectores a multiplicar, y luego se toman A2.B3 - B2.A3.
- Lo mismo sucede cuando se halla la componente en Y, se omite A2 y B2 y se toman A1.B3 - A3.B1, con la particularidad de que el resultado es negativo.
- Cuando se halla la componente Z se omiten A3 y B3, luego se toman A1.B2 - A2.B1

Bien, ahora veamos un ejemplo para que termines de entender esta maravillosa operación. El ejemplo consiste en calcular el producto vectorial entre el vector A=(-2, -5, 3) y B=(-4, 1, -6), a continuación veamos la solución.

Dado los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{B} = -4\vec{i} + 1\vec{j} - 6\vec{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ -4 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-5 \cdot -6) - (3 \cdot 1)\vec{i} - (2 \cdot -6) - (3 \cdot -4)\vec{j} + (2 \cdot 1) - (-5 \cdot -4)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (30) - (3)\vec{i} - ((-12) - (-12))\vec{j} + (2) - (20)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (27)\vec{i} - (0)\vec{j} + (-18)\vec{k}$$

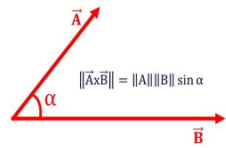
$$\vec{A} \times \vec{B} = 27\vec{i} - 0\vec{j} - 18\vec{k}$$

En resumen, hemos calculado las componentes de la siguiente manera:

- Componente en X= $(-5 \cdot -6) - (3 \cdot 1) = 30 - 3 = 27$
- Componente en Y= $(2 \cdot -6) - (3 \cdot -4) = -12 + 12 = 0$
- Componente en Z= $(2 \cdot 1) - (-5 \cdot -4) = 2 - 20 = -18$

Fórmula del producto cruz o vectorial

La fórmula para hallar el módulo del vector producto cruz entre dos vectores es muy sencilla, solo se debe multiplicar el módulo de los vectores a multiplicar por el seno del ángulo que forman entre ellos. Veamos de manera gráfica:

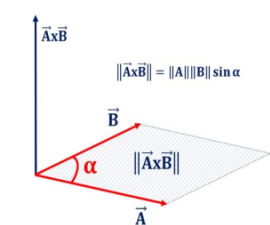


Interpretación geométrica del producto vectorial

Cunado hallamos el producto cruz entre dos vetores, estamos hallando el vector perpendicular a ambos vectores, ademas su módulo es igual al area que encierra el paralegramo formado por los vectores a multiplicar.

Por otro lado, podemos notar claramente que la magnitud o módulo del vector producto cruz, depende también del ángulo que forman los vectores a multiplicar, cuanto más cerrado es el ángulo menor será el área encerrada y por ende menor el módulo del vector producto cruz.

Te recomendamos leer: [Producto interno o punto de vectores](#)



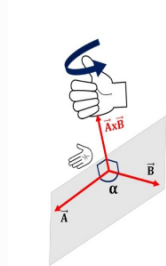
La regla de la mano derecha

En la operación de producto vectorial, se cumple la regla de la mano derecha, básicamente nos sirve para visualizar la dirección de vector resultado. Consiste en colocar la mano en posición de los vectores a multiplicar, de tal manera que el pulgar de la mano siempre indica la dirección del vector resultado, la palma de la mano debe estar abierta, de tal manera que la dirección del primer vector que aparece en la operación es representada por los cuatro dedos que pueden girar hacia la palma, es decir hacia el segundo vector.

Observa la imagen, el vector resultado AxB apunta hacia arriba, ya que los dedos giran de A hacia B y el pulgar apunta hacia arriba; sería el caso contrario si tuviéramos que hallar el vector BxA, el pulgar tendría que apuntar hacia abajo para que los dedos puedan girar de B hacia A.

En resumen, los dedos deben girar desde el primer vector hacia el segundo vector, por lo tanto no es lo mismo que gire de A hacia B a que gire de B hacia A, pues producen vectores con sentidos opuestos, aunque el módulo será el mismo, sin embargo vectorialmente no son lo mismo.

$$A \times B \neq B \times A$$



Si tomamos en cuenta un plano cualquiera, ya sea una hoja de papel, una pizarra o cualquier otro, asumiendo que los vectores a multiplicar se encuentran en dicho plano, notarás que el vector resultado de hacer el producto cruz, puede salir perpendicularmente de dicho plano o puede entrar, solo existen dos posibilidades y en palabras sencillas, dependerá del orden de los (factores) vectores.

X4 PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL O CRUZ

Dado los vectores **A** y **B** que pertenecen al espacio tridimensional, y un escalar **p** que pertenece a los números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades del producto vectorial:

PROPIEDADES DE PRODUCTO VECTORIAL

- 1) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- 2) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$
- 3) $p(\vec{A}) \times \vec{B} = p(\vec{A} \times \vec{B})$
- 4) $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
- 5) $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \text{sen}\theta$
- 6) Si: $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB$
- 7) Si: $\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

X5 Producto cruz de vectores unitarios canónicos

El producto vectorial de vectores canónicos, es decir de los vectores unitarios en dirección de cada eje coordenado, es un claro ejemplo de las propiedades que mencionamos anteriormente.

El primer caso consiste en el producto cruz en sentido antihorario, basta con aplicar la regla de la mano derecha para ver la dirección del vector resultado, notarás que el pulgar sale del plano, por ende en dirección positiva y por tratarse de vectores cuyas componentes son 1 y ceros, el resultado será otro vector canónico.

$$\begin{matrix} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{matrix}$$

El segundo caso se trata de un caso inverso, si aplicamos la regla de la mano derecha otras que el pulgar apunta hacia dentro, por ende es dirección el vector resultado tendrá sentido negativo, pues los dedos giran en sentido horario a simple vista.

$$\begin{matrix} \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{matrix}$$

Cuando se trata de vectores iguales, el producto vectorial entre ellos será igual al vector nulo o cero, pues no existe ningún área encerrada entre ellos, o por si quieres entender de otra forma, el seno del ángulo cero será cero, lo cual hará que el resultado sea un vector con módulo cero.

$$\begin{matrix} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \\ \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{matrix}$$

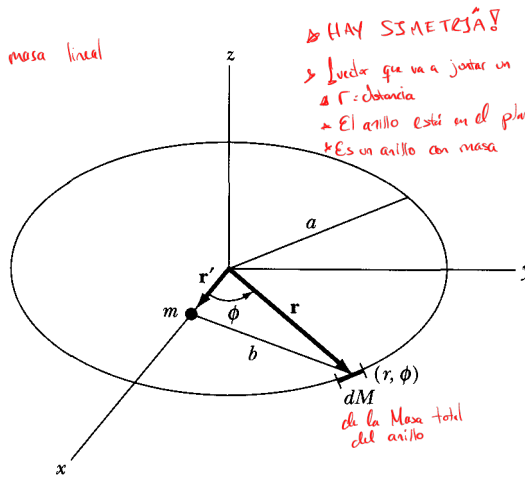
5. Aplicaciones de vectores en física

El análisis vectorial es ampliamente utilizado en la física para representar, analizar, estudiar y comprender las magnitudes vectoriales. Pero veamos donde se utilizan concretamente.

- En el estudio de la cinemática.- la cinemática está llena de magnitudes vectoriales, en ella se estudian desde vectores de posición, desplazamiento, velocidad, aceleración y mucho más cuando se analiza un cuerpo en movimiento.
- En estática.- las fuerzas que intervienen para que un cuerpo se encuentre en equilibrio son representadas por vectores, pues tienen una dirección y sentido. El estudio de los cuerpos en equilibrio necesariamente aplica el análisis vectorial para su mejor comprensión.
- En dinámica.- al estudiar la causa de movimiento de los cuerpos también se recurre al análisis vectorial.

Los vectores están presentes en el estudio de los fenómenos mencionados y muchos otros más, pues ayudan a estudiarlas y desarrollarlas de la mejor manera posible.

Aquí vamos a tener una densidad de masa lineal
 $\rho = \frac{M}{2\pi a}$ } Esto ya es la circunferencia



HAY SIMETRÍA!

¿Qué va a jugar un diferencial dM de la Masa Total del Anillo?
 Δr : distancia
 * El anillo está en el plano x,y
 * Es un anillo con masa

El segmento de un círculo está dado por:

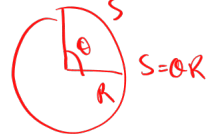


FIGURE 5-6 Example 5.3. The geometry of the point mass m and ring of mass M .

The potential is given by Equation 5.7 where $\rho = M/2\pi a$:

$$d\Phi = -G \frac{dM}{b} = -\frac{Gap}{b} d\phi \quad \Phi = -Gap \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{b} \quad (5.23)$$

where b is the distance between dM and m , and $dM = \rho a d\phi$. Let $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ be the position vectors to dM and m , respectively.

$$\begin{aligned} b &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |a \cos \phi \mathbf{e}_1 + a \sin \phi \mathbf{e}_2 - r' \mathbf{e}_1| \\ &= |(a \cos \phi - r') \mathbf{e}_1 + a \sin \phi \mathbf{e}_2| = [(a \cos \phi - r')^2 + a^2 \sin^2 \phi]^{1/2} \\ &= (a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \phi)^{1/2} = a \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Integrating Equation 5.23 gives

$$\begin{aligned} \Phi(r') &= -G \int \frac{dM}{b} = -\rho a G \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{b} \\ &= -\rho G \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

The integral in Equation 5.25 is difficult, so let us consider positions close to the equilibrium point, $r' = 0$. If $r' \ll a$, we can expand the denominator in Equation 5.25.

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right] \\ &\quad + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^2 + \dots \\ &\Rightarrow 1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \end{aligned} \quad (5.26)$$

Estamos haciendo lo que vimos en Análisis Vectorial. Arriba viene un breve resumen de...

lo expresamos en vectores unitarios. Sacar la 'norma' de un vector. tenemos que saber hacer producto escalar para hacer esto (ver resumen de A.V.)
 $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$
 para luego sacar la 'norma' de un vector.
 tenemos que saber hacer producto escalar para hacer esto (ver resumen de A.V.)
 $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$

Estamos en el plano x,y de lo contrario sería muy difícil! Tip para Examen!

Esta integral YA ESTÁ? MUY complicada. En estos casos usamos Series de Tylor.

aproximación de b



Series Taylor

r' muy pequeño
 $r' \ll r$

$$b(r'=0) = 1$$

$$b'(r'=0) = -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{-3/2} \left[\frac{2r'}{a^2} - \frac{2}{a} \cos \phi \right] \quad r' = \frac{r'}{a} \cos \phi$$

$$b''(r'=0) = \left(-\frac{r'^2}{4} \right) \left\{ -\frac{3}{2} \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{-5/2} \left[\frac{2r'}{a^2} - \frac{2}{a} \cos \phi \right]^2 \right.$$

$$\left. + \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right] \left[\frac{2}{a^2} \right] \right\} \quad r'=0$$

$$= \left(-\frac{r'^2}{4} \right) \left\{ -\frac{3}{2} (1) \left(-\frac{2}{a} \cos \phi \right)^2 + (1) \left(\frac{2}{a^2} \right) \right\}$$

$$= -\frac{r'^2}{4} \left[-\frac{6}{a^2} \cos^2 \phi + \frac{2}{a^2} \right]$$

$b =$

Aproximación de b con

serie de Taylor.

$$T = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$T(f, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$F = -r \Phi = \frac{\partial}{\partial r'} \left[-\frac{GM}{a} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \right] \right]$$

$$= \frac{GM}{a^3} \frac{1}{2} r'$$

La Fuerza es (+)
es repulsiva.

* Sacar ahora punto de equilibrio:

$$\frac{d\Phi}{dr'} = -\frac{GMm}{2a^3} r' = 0 \Rightarrow r' = 0$$

Ahora Gráfica:

Ahora sacamos 2da derivada:

$$\frac{d^2\Phi}{dr'^2} = -\frac{mMG}{2a^3} < 0 \quad \therefore \text{es Inestable.}$$



Un potencial Φ nos da mucha información:

- * Fuerza
- * Aceleración
- * Puntos de equilibrio

- * Nos dice si es estable o inestable
- * Podemos obtener la gráfica

Equation 5.25 becomes

El potencial final así queda

$$\Phi(r') = -\rho G \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \right\} d\phi \quad (5.27)$$

0 la integral del coseno
la integral de cos^2 phi es pi
la integral de 1 es 2pi

$$= -\rho G \left\{ 2\pi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 (3\pi - 2\pi) \right\}$$

RECORDAMOS QUE which is easily integrated with the result

Nosotros SIEMPRE
 Queremos las cosas en términos
 de la masa para la situación gravitacional

Forma habitual de un potencial gravitacional.

$$\Phi(r') = -\frac{MG}{a} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (5.28)$$

¿Qué pasa si $r'=0$?

Es decir si la
 masita 'm' se
 ubica en el centro
 del anillo:



¿Cómo queda el
 potencial?

R. Sería un potencial
 constante y uniforme.

¿Que pasa si el
 radio del anillo se
 hace muy pequeño?
 es decir $r \rightarrow 0$

R. Se va a infinito.

¿Cómo se saca la
 fuerza?

R. Sólo hay que aplicarle el gradiente.
 cc. 5.2 en la dirección de r
 unitario en x $\hat{e}_x$

$F = -\nabla \Phi$ ver
 Aquí la fuerza
 es + es

de tipo REAUSVA

The potential energy $U(r')$ is from Equation 5.11, simply

$$U(r') = m\Phi(r') = -\frac{mMG}{a} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (5.29)$$

The position of equilibrium is found (from Equation 2.100) by

$$\frac{dU(r')}{dr'} = 0 = -\frac{mMG}{a} \frac{1}{2} \frac{r'}{a^2} + \dots \quad (5.30)$$

so $r' = 0$ is an equilibrium point. We use Equation 2.103 to determine the stability:

$$\frac{d^2U(r')}{dr'^2} = -\frac{mMG}{2a^3} + \dots < 0 \quad (5.31)$$

so the equilibrium point is unstable.

This last result is not obvious, because we might be led to believe that a small displacement from $r' = 0$ might still be returned to $r' = 0$ by the gravitational forces from all the mass in the ring surrounding it.

Lunes 22 Mayo 2023

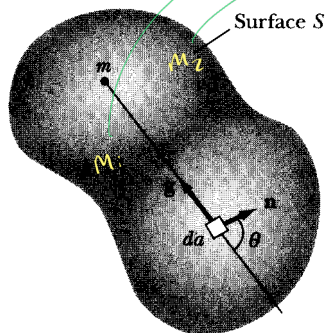
Poisson's Equation

It is useful to compare these properties of gravitational fields with some of the familiar results from electrostatics that were determined in the formulation of Maxwell's equations. Consider an arbitrary surface as in Figure 5-7 with a mass m placed somewhere inside. Similar to electric flux, let's find the gravitational flux Φ_m emanating from mass m through the arbitrary surface S .

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \, da \quad (5.32)$$

where the integral is over the surface S and the unit vector $\mathbf{n}$ is normal to the surface at the differential area da . If we substitute $\mathbf{g}$ from Equation 5.3 for

Teníamos:
 $g = -\frac{GM}{R^2}$
 En este caso para
 que sea una
 $g = -\frac{Gm}{r^2}$



Aquí se trata un producto escalar
 también tenemos un vector unitario

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_S \hat{n} \cdot \vec{g} da = -Gm \int_S \frac{e_3 \theta}{r^2} da \\ &= -4\pi Gm = -4\pi G \sum_i m_i \\ &= -4\pi G \int_V \rho dv\end{aligned}$$

Si esto número de
 masas lo hacemos
 tender a infinito hasta
 cubrir todo el
 espacio tenemos:

FIGURE 5-7 An arbitrary surface with a mass m placed inside. The unit vector $\mathbf{n}$ is normal to the surface at the differential area da .

the gravitational field vector for a body of mass m , we have for the scalar product $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = -Gm \frac{\cos \theta}{r^2}$$

where θ is the angle between $\mathbf{n}$ and $\mathbf{g}$. We substitute this into Equation 5.32 and obtain

$$\Phi_m = -Gm \int_S \frac{\cos \theta}{r^2} da$$

The integral is over the solid angle of the arbitrary surface and has the value 4π steradians, which gives for the mass flux

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = -4\pi Gm \quad (5.33)$$

Note that it is immaterial where the mass is located inside the surface S . We can generalize this result for many masses m_i inside the surface S by summing over the masses.

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = -4\pi G \sum_i m_i \quad (5.34)$$

If we change to a continuous mass distribution within surface S , we have

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = -4\pi G \int_V \rho dv \quad (5.35)$$

where the integral on the right-hand side is over the volume V enclosed by S , ρ is the mass density, and dv is the differential volume. We use Gauss's divergence theorem to rewrite this result. Gauss's divergence theorem, Equation 1.130 where $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$, is

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dv \quad (5.36)$$

abandonando la notación de g

If we set the right-hand sides of Equations 5.35 and 5.36 equal, we have

$$\int_V (-4\pi G)\rho dv = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dv$$

and because the surface S , and its volume V , is completely arbitrary, the two integrands must be equal.

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad \text{divergencia gravitacional.} \quad (5.37)$$

This result is similar to the differential form of Gauss's law for electric field, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$, where ρ in this case is the charge density.

We insert $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ from Equation 5.5 into the left-hand side of Equation 5.37 and obtain $\nabla \cdot \mathbf{g} = -\nabla \cdot \nabla\Phi = -\nabla^2\Phi$. Equation 5.37 becomes

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad \nabla^2\Phi = 0 \quad (5.38)$$

which is known as *Poisson's equation* and is useful in a number of potential theory applications. When the right-hand side of Equation 5.38 is zero, the result $\nabla^2\Phi = 0$ is an even better known equation called *Laplace's equation*. Poisson's equation is useful in developing Green's functions, whereas we often encounter Laplace's equation when dealing with various coordinate systems.

5.3 Lines of Force and Equipotential Surfaces

Let us consider a mass that gives rise to a gravitational field that can be described by a field vector $\mathbf{g}$. Let us draw a line outward from the surface of the mass such that the direction of the line at every point is the same as the direction of $\mathbf{g}$ at that point. This line will extend from the surface of the mass to infinity. Such a line is called a **line of force**.

By drawing similar lines from every small increment of surface area of the mass, we can indicate the direction of the force field at any arbitrary point in space. The lines of force for a single point mass are all straight lines extending from the mass to infinity. Defined in this way, the lines of force are related only to the *direction* of the force field at any point. We may consider, however, that the *density* of such lines—that is, the number of lines passing through a unit area oriented perpendicular to the lines—is proportional to the *magnitude* of the force at that area. The lines-of-force picture is thus a convenient way to visualize both the magnitude and the direction (i.e., the *vector* property) of the field.

The potential function is defined at every point in space (except at the position of a point mass). Therefore, the equation

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \text{constant} \quad (5.39)$$

defines a surface on which the potential is constant. Such a surface is called an **equipotential surface**. The field vector $\mathbf{g}$ is equal to the gradient of Φ , so $\mathbf{g}$ can

fijose como
partiendo de lo
más básico
obtenemos esto

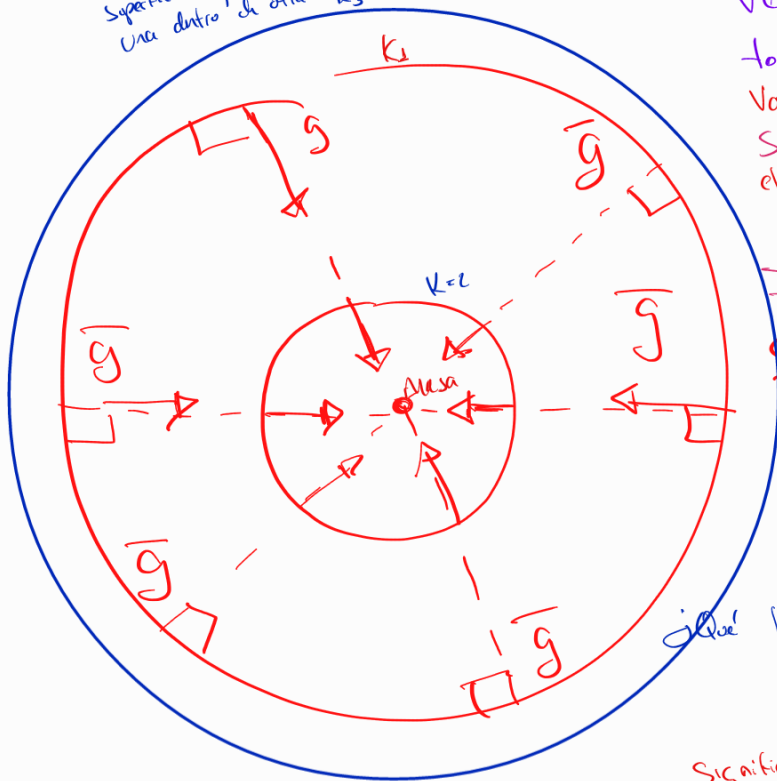
La forma de
la física
No depende del
tiempo de la fuerza.
Solo
de las constantes

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{diversidad} \quad \text{Ley de Gauss} \quad \text{Llegamos a lo del otro día.}$$

∴ Sólo
dependen de
las
constantes

Ahora vamos un
problema sencillo. ver
Ejemplo 5.4

Podemos tener varias superficies equipotenciales una dentro de otra K_3



Vectores $\vec{g}$ apuntando hacia m
 todos están a un mismo radio
 Van a formar una superficie a esto le llamamos
 SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL que significa que
 el potencial es constante y es el mismo

Superficie equipotencial

$$\Phi(x, y, z) = (K_3) \text{cte}$$

¿Qué le ocurre al gradiente en esta superficie?

$$\nabla \Phi = 0 = \vec{g} = 0$$

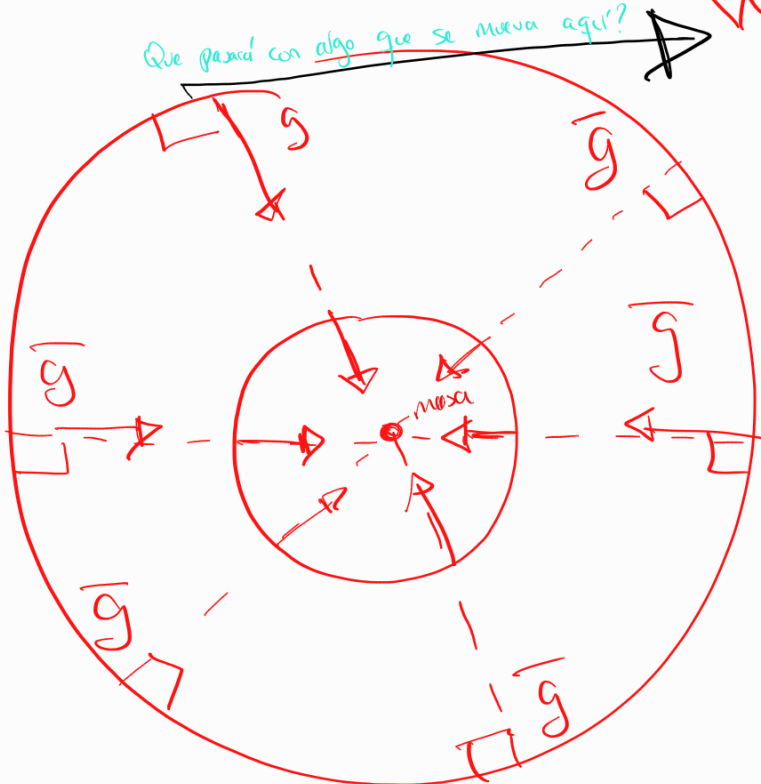
Significa que $\vec{g}$ es perpendicular a la superficie equipotencial.

En las curvas equipotenciales el gradiente es 0

Físicamente qué pasaría si $\vec{g}$ NO FUERA EQUIPOTENCIAL?

R. Giraría.

Que pasaría con algo que se mueva aquí?



$$W = F * x \cos \theta$$

$$= 0$$

El trabajo es 0
 porque son perpendiculares
 forman ángulo de 90°

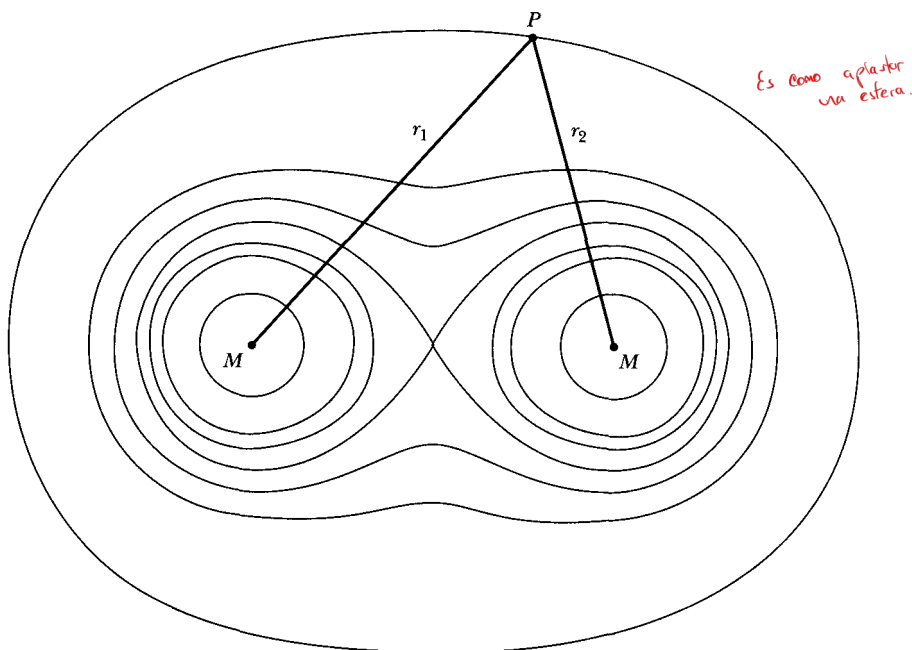


FIGURE 5-8 The equipotential surfaces due to two point masses M .

have no component *along* an equipotential surface. It therefore follows that every line of force must be normal to every equipotential surface. Thus, the field does no work on a body moving along an equipotential surface. Because the potential function is single valued, no two equipotential surfaces can intersect or touch. The surfaces of equal potential that surround a single, isolated point mass (or any spherically symmetric mass) are all spheres. Consider two point masses M that are separated by a certain distance. If r_1 is the distance from one mass to some point in space and if r_2 is the distance from the other mass to the same point, then

$$\Phi = -GM \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \text{constant} \quad (5.40)$$

defines the equipotential surfaces. Several of these surfaces are shown in Figure 5-8 for this two-particle system. In three dimensions, the surfaces are generated by rotating this diagram around the line connecting the two masses.

5.4 When Is the Potential Concept Useful?

The use of potentials to describe the effects of “action-at-a-distance” forces is an extremely important and powerful technique. We should not, however, lose sight of the fact that the ultimate justification for using a potential is to provide a

convenient means of calculating the force on a body (or the energy for the body in the field)—for it is the *force* (and energy) and not the *potential* that is the physically meaningful quantity. Thus, in some problems, it may be easier to calculate the force directly, rather than computing a potential and then taking the gradient. The advantage of using the potential method is that the potential is a *scalar* quantity*: We need not deal with the added complication of sorting out the components of a vector until the gradient operation is performed. In direct calculations of the force, the components must be carried through the entire computation. Some skill, then, is necessary in choosing the particular approach to use. For example, if a problem has a particular symmetry that, from physical considerations, allows us to determine that the force has a certain direction, then the choice of that direction as one of the coordinate directions reduces the vector calculation to a simple scalar calculation. In such a case, the direct calculation of the force may be sufficiently straightforward to obviate the necessity of using the potential method. Every problem requiring a force must be examined to discover the easiest method of computation.

EXAMPLE 5.4

Consider a thin uniform disk of mass M and radius a . Find the force on a mass m located along the axis of the disk.

Solution. We solve this problem by using both the potential and direct force approaches. Consider Figure 5.9. The differential potential $d\Phi$ at a distance z is

Tenemos un disco
de masa M y radio " a "

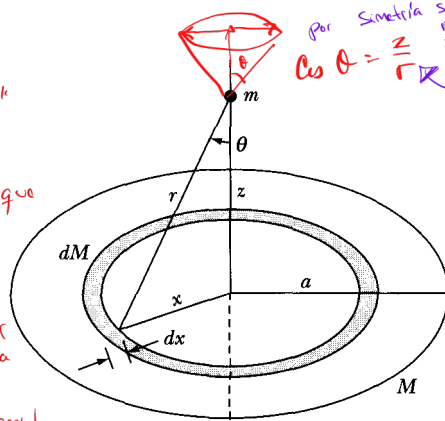
SABEMOS QUE...

para poder encontrar la carga tenemos que
hacer anillos concéntricos. ∴ Este anillo
tiene un radio x , un ancho dx y tiene una
masa dM

Este anillo de masa M va a tener
sobre una masa ' m ' una cierta fuerza

Pro. Vamos a trabajar sobre el potencial
y luego sacaremos la Fuerza y todo lo demás.

Comencemos con el diferencial de potencial $d\Phi$



Por simetría solo
me interesa r ya que en
" r " ya no hay
más

¿Cómo definimos la densidad
superficial?

$$\rho = \frac{dM}{dA} \quad x = \text{radio} \quad 2\pi x = \text{la circunferencia}$$

$$= \frac{dM}{2\pi x dx}$$

$$dM = 2\pi \rho x dx$$

¿Cuál es el potencial entre ' m ' y ' dM '?
el potencial es $\frac{dM}{r}$ donde r es la distancia
que los separa

FIGURE 5-9 Example 5.4. We use the geometry shown here to find the gravitational force on a point mass m due to a thin uniform disk of mass M .

*We shall see in Chapter 7 another example of a scalar function from which vector results may be obtained. This is the **Lagrangian function**, which, to emphasize the similarity, is sometimes (mostly in older treatments) called the *kinetic potential*.

given by

$$d\Phi = -G \frac{dM}{r} \quad (5.41)$$

The differential mass dM is a thin ring of width dx , because we have azimuthal symmetry.

$$dM = \rho dA = \rho 2\pi x dx \quad (5.42)$$

$$d\Phi = -2\pi\rho G \frac{x dx}{r} = -2\pi\rho G \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\Phi(z) = -\pi\rho G \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}} = -2\pi\rho G (x^2 + z^2)^{1/2} \Big|_0^a$$

$$= -2\pi\rho G [(a^2 + z^2)^{1/2} - z]$$

We find the force from

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -m \nabla \Phi$$

From symmetry, we have only a force in the z direction,

$$F_z = -m \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = +2\pi m \rho G \left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - 1 \right] \quad (5.45)$$

In our second method, we compute the force directly using Equation 4.2:

$$d\mathbf{F} = -Gm \frac{dM'}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.46)$$

where dM' refers to the mass of a small differential area more like a square than a thin ring. The vectors complicate matters. How can symmetry help? For every small dM' on one side of the thin ring of width dx , another dM' exists on the other side that exactly cancels the horizontal component of $d\mathbf{F}$ on m . Similarly, all horizontal components cancel, and we need only consider the vertical component of $d\mathbf{F}$ along z .

$$dF_z = \cos \theta |d\mathbf{F}| = -mG \frac{\cos \theta dM'}{r^2}$$

and, because $\cos \theta = z/r$,

$$dF_z = -mG \frac{z dM'}{r^3}$$

Now we integrate over the mass $dM' = \rho 2\pi x dx$ around the ring and obtain

$$dF_z = -mG\rho \frac{2\pi x dx}{r^3}$$

and

Como vemos este problema tambien es de electrostatica. Cambiamos todo esto por cargas y ya quedo. Ya solo hay que tener cuidado con los signos ya que las cargas se atraen y se repelen. En este caso nada más atraen.

$$\begin{aligned}
 F_z &= -\pi m \rho G z \int_0^a \frac{2x dx}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \\
 &= -\pi m \rho G z \left[\frac{-2}{(z^2 + x^2)^{1/2}} \right]_0^a \\
 &= 2\pi m \rho G \left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

GMPTE $\int_0^a \frac{du}{u^{3/2}}$

Tarea Seguir

which is identical to Equation 5.45. Notice that the value of F_z is negative, indicating that the force is downward in Figure 5-9 and attractive.

Ahora nos vamos a 5.3. Lineas de Fuerza y Superficies Equipotenciales.

Esto No lo Vimos

5.5 Ocean Tides

The ocean tides have long been of interest to humans. Galileo tried unsuccessfully to explain ocean tides but could not account for the timing of the approximately two high tides each day. Newton finally gave an adequate explanation. The tides are caused by the gravitational attraction of the ocean to both the Moon and the Sun, but there are several complicating factors.

The calculation is complicated by the fact that the surface of Earth is not an inertial system. Earth and Moon rotate about their center of mass (and move about the Sun), so we may regard the water nearest the Moon as being pulled away from Earth, and Earth as being pulled away from the water farthest from the Moon. However, Earth rotates while the Moon rotates about Earth. Let's first consider only the effect of the Moon, adding the effect of the Sun later. We will assume a simple model whereby Earth's surface is completely covered with water, and we shall add the effect of Earth's rotation at an appropriate time. We set up an inertial frame of reference $x'y'z'$ as shown in Figure 5.10a. We let M_m be the mass of the Moon, r the radius of a circular Earth, and D the distance from the center of the Moon to the center of Earth. We consider the effect of both the Moon's and Earth's gravitational attraction on a small mass m placed on the surface of Earth. As displayed in Figure 5-10a, the position vector of the mass m from the Moon is $\mathbf{R}$, from the center of Earth is $\mathbf{r}$, and from our inertial system $\mathbf{r}'_m$. The position vector from the inertial system to the center of Earth is $\mathbf{r}'_E$. As measured from the inertial system, the force on m , due to the earth and the Moon, is

$$m \ddot{\mathbf{r}}'_m = -\frac{GmM_E}{r^2} \mathbf{e}_r - \frac{GmM_m}{R^2} \mathbf{e}_R \tag{5.48}$$

Similarly, the force on the center of mass of Earth caused by the Moon is

$$M_E \ddot{\mathbf{r}}'_E = -\frac{GM_E M_m}{D^2} \mathbf{e}_D \tag{5.49}$$

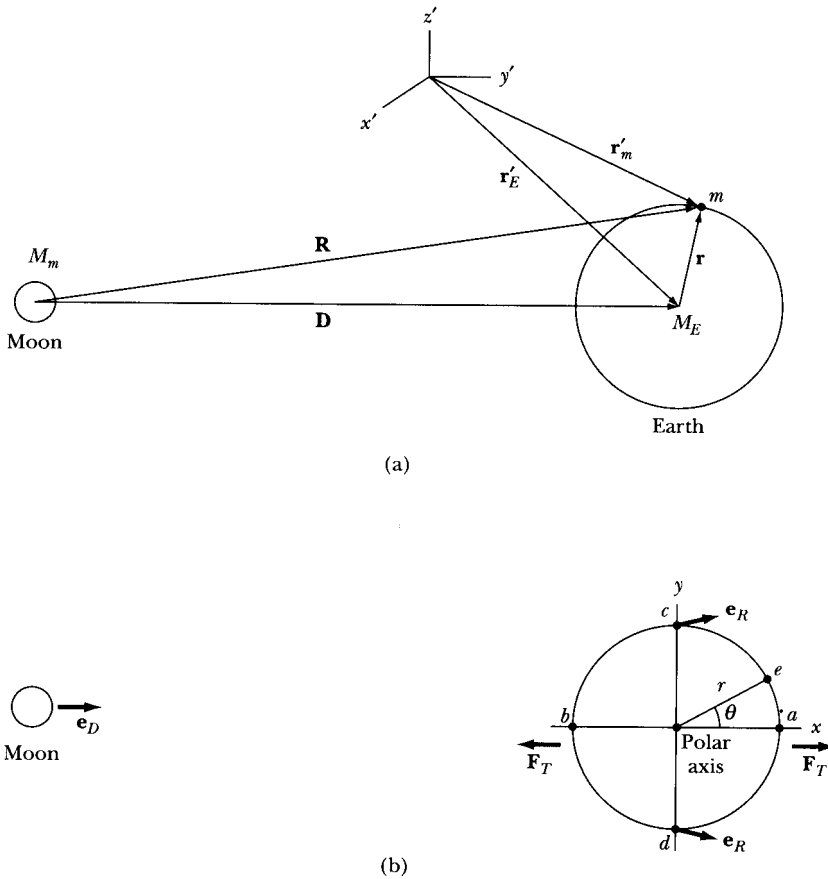


FIGURE 5-10 (a) Geometry to find ocean tides on Earth due to the Moon.
 (b) Polar view with the polar axis along the z -axis.

We want to find the acceleration $\ddot{\mathbf{r}}$ as measured in the noninertial system placed at the center of Earth. Therefore, we want

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}'_m - \ddot{\mathbf{r}}'_E = \frac{m \ddot{\mathbf{r}}'_m}{m} - \frac{M_E \ddot{\mathbf{r}}'_E}{M_E} \\
 &= -\frac{GM_E}{r^2} \mathbf{e}_r - \frac{GM_m}{R^2} \mathbf{e}_R + \frac{GM_m}{D^2} \mathbf{e}_D \\
 &= -\frac{GM_E}{r^2} \mathbf{e}_r - GM_m \left(\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} - \frac{\mathbf{e}_D}{D^2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

The first part is due to Earth, and the second part is the acceleration from the **tidal** force, which is responsible for producing the ocean tides. It is due to the difference between the Moon's gravitational pull at the center of Earth and on Earth's surface.

We next find the effect of the tidal force at various points on Earth as noted in Figure 5-10b. We show a polar view of Earth with the polar axis along the z -axis. The tidal force $\mathbf{F}_T$ on the mass m on Earth's surface is

$$\mathbf{F}_T = -GmM_m \left(\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} - \frac{\mathbf{e}_D}{D^2} \right) \quad (5.51)$$

where we have used only the second part of Equation 5.50. We look first at point a , the farthest point on Earth from the Moon. Both unit vectors $\mathbf{e}_R$ and $\mathbf{e}_D$ are pointing in the same direction away from the Moon along the x -axis. Because $R > D$, the second term in Equation 5.51 predominates, and the tidal force is along the $+x$ -axis as shown in Figure 5-10b. For point b , $R < D$ and the tidal force has approximately the same magnitude as at point a because $r/D \ll 1$, but is along the $-x$ -axis. The magnitude of the tidal force along the x -axis, F_{Tx} , is

$$\begin{aligned} F_{Tx} &= -GmM_m \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{D^2} \right) = -GmM_m \left(\frac{1}{(D+r)^2} - \frac{1}{D^2} \right) \\ &= -\frac{GmM_m}{D^2} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{r}{D}\right)^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

We expand the first term in brackets using the $(1+x)^{-2}$ expansion in Equation D.9.

$$F_{Tx} = -\frac{GmM_m}{D^2} \left[1 - 2\frac{r}{D} + 3\left(\frac{r}{D}\right)^2 - \dots - 1 \right] = +\frac{2GmM_m r}{D^3} \quad (5.52)$$

where we have kept only the largest nonzero term in the expansion, because $r/D = 0.02$.

For point c , the unit vector $\mathbf{e}_R$ (Figure 5-10b) is not quite exactly along $\mathbf{e}_D$, but the x -axis components approximately cancel, because $R \approx D$ and the x -components of $\mathbf{e}_R$ and $\mathbf{e}_D$ are similar. There will be a small component of $\mathbf{e}_R$ along the y -axis. We approximate the y -component of $\mathbf{e}_R$ by $(r/D)\mathbf{j}$, and the tidal force at point c , call it $\mathbf{F}_{Ty}$, is along the y -axis and has the magnitude

$$F_{Ty} = -GmM_m \left(\frac{1}{D^2} \frac{r}{D} \right) = -\frac{GmM_m r}{D^3} \quad (5.53)$$

Note that this force is along the $-y$ -axis toward the center of Earth at point c . We find similarly at point d the same magnitude, but the component of $\mathbf{e}_R$ will be along the $-y$ -axis, so the force itself, with the sign of Equation 5.53, will be along the $+y$ -axis toward the center of Earth. We indicate the tidal forces at points a , b , c , and d on Figure 5-11a.

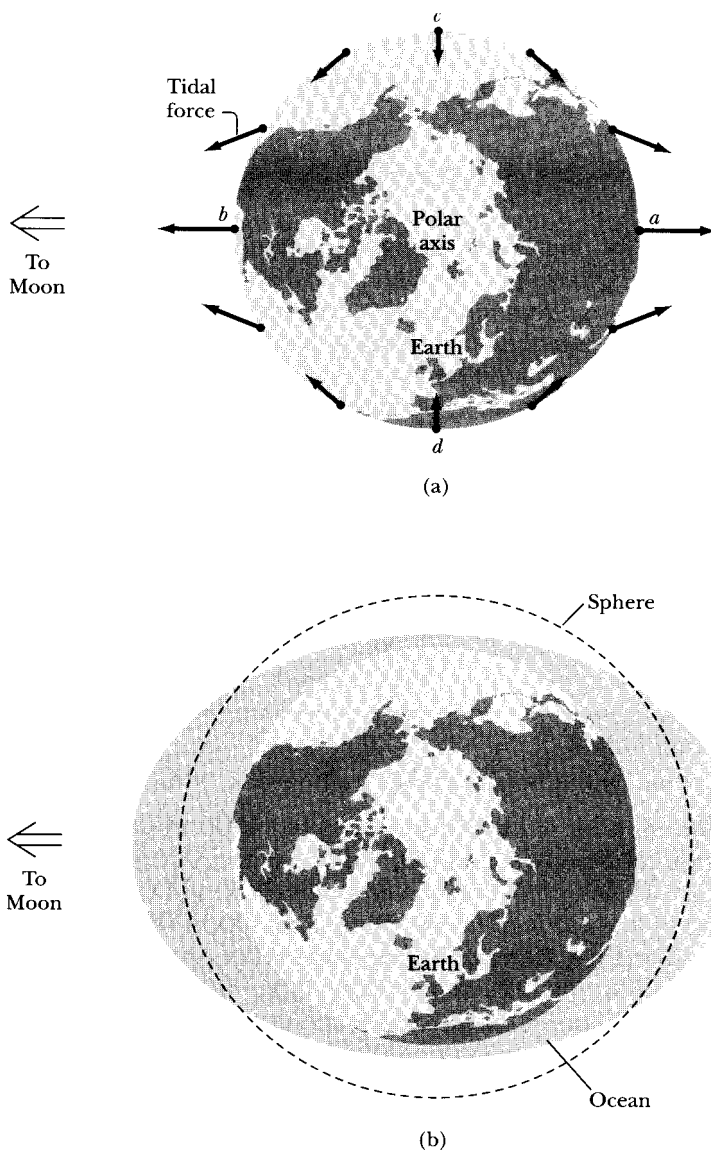


FIGURE 5-11 (a) The tidal forces are shown at various places on Earth's surface including the points a , b , c , and d of Figure 5-10. (b) An exaggerated view of Earth's ocean tides.

We determine the force at an arbitrary point e by noting that the x - and y -components of the tidal force can be found by substituting x and y for r in F_{Tx} and F_{Ty} , respectively, in Equations 5.52 and 5.53.

$$F_{Tx} = \frac{2GmM_mx}{D^3}$$

$$F_{Ty} = -\frac{GmM_my}{D^3}$$

Then at an arbitrary point such as e , we let $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$, so we have

$$F_{Tx} = \frac{2GmM_m r \cos \theta}{D^3} \quad (5.54a)$$

$$F_{Ty} = -\frac{GmM_m r \sin \theta}{D^3} \quad (5.54b)$$

Equations 5.54a and b give the tidal force around Earth for all angles θ . Note that they give the correct result at points a , b , c , and d .

Figure 5-11a gives a representation of the tidal forces. For our simple model, these forces lead to the water along the y -axis being more shallow than along the x -axis. We show an exaggerated result in Figure 5-11b. As Earth makes a revolution about its own axis every 24 hours, we will observe two high tides a day.

A quick calculation shows that the Sun's gravitational attraction is about 175 times stronger than the Moon's on Earth's surface, so we would expect tidal forces from the Sun as well. The tidal force calculation is similar to the one we have just performed for the Moon. The result (Problem 5-18) is that the tidal force due to the Sun is 0.46 that of the Moon, a sizable effect. Despite the stronger attraction due to the Sun, the gravitational force gradient over the surface of Earth is much smaller, because of the much larger distance to the Sun.

EXAMPLE 5.5

Calculate the maximum height change in the ocean tides caused by the Moon.

Solution. We continue to use our simple model of the ocean surrounding Earth. Newton proposed a solution to this calculation by imagining that two wells be dug, one along the direction of high tide (our x -axis) and one along the direction of low tide (our y -axis). If the tidal height change we want to determine is h , then the difference in potential energy of mass m due to the height difference is mgh . Let's calculate the difference in work if we move the mass m from point c in Figure 5-12 to the center of Earth and then to point a . This work W done by gravity must equal the potential energy change mgh . The work W is

$$W = \int_{r+\delta_1}^0 F_{Ty} dy + \int_0^{r+\delta_2} F_{Tx} dx$$

where we use the tidal forces F_{Ty} and F_{Tx} of Equations 5.54. The small distances δ_1 and δ_2 are to account for the small variations from a spherical Earth, but these values are so small they can be henceforth neglected. The value for W becomes

$$\begin{aligned} W &= \frac{GmM_m}{D^3} \left[\int_r^0 (-y) dy + \int_0^r 2x dx \right] \\ &= \frac{GmM_m}{D^3} \left(\frac{r^2}{2} + r^2 \right) = \frac{3GmM_m r^2}{2D^3} \end{aligned}$$

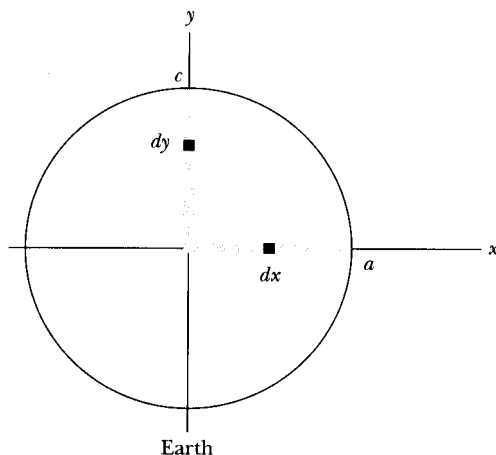


FIGURE 5-12 Example 5.5. We calculate the work done to move a point mass m from point c to the center of Earth and then to point a .

Because this work is equal to mgh , we have

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{3GM_m r^2}{2D^3} \\ h &= \frac{3GM_m r^2}{2gD^3} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Note that the mass m cancels, and the value of h does not depend on m . Nor does it depend on the substance, so to the extent Earth is plastic, similar tidal effects should be (and are) observed for the surface land. If we insert the known values of the constants into Equation 5.55, we find

$$h = \frac{3(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(7.350 \times 10^{22} \text{ kg})(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)(3.84 \times 10^8 \text{ m})^3} = 0.54 \text{ m}$$

The highest tides (called *spring* tides) occur when Earth, the Moon, and the Sun are lined up (new moon and full moon), and the smallest tides (called *neap* tides) occur for the first and third quarters of the Moon when the Sun and Moon are at right angles to each other, partially cancelling their effects. The maximum tide, which occurs every 2 weeks, should be $1.46h = 0.83 \text{ m}$ for the spring tides.

An observer who has spent much time near the ocean has noticed that typical oceanshore tides are greater than those calculated in Example 5.5. Several other effects come into play. Earth is not covered completely with water, and the continents play a significant role, especially the shelves and narrow estuaries. Local effects can be dramatic, leading to tidal changes of several meters. The tides in midocean, however, are similar to what we have calculated. Resonances can affect the natural oscillation of the bodies of water and cause tidal changes.

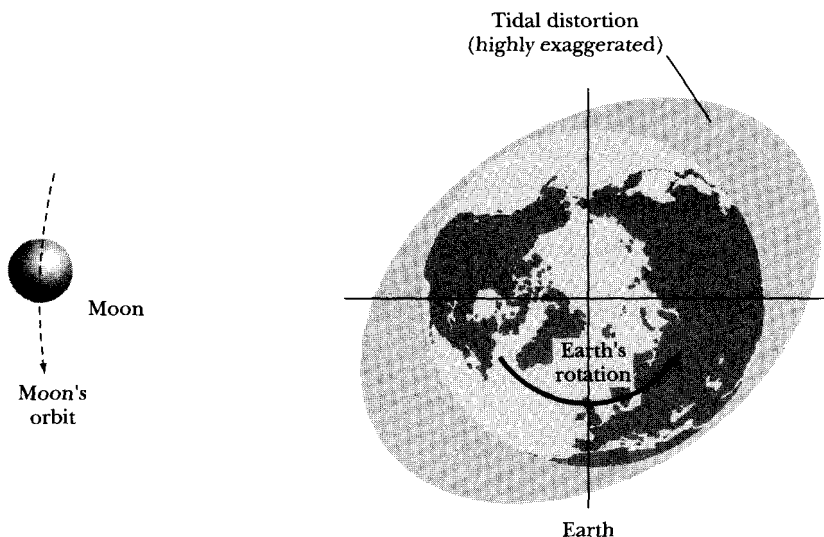


FIGURE 5-13 Some effects cause the high tides to not be exactly along the Earth-Moon axis.

Tidal friction between water and Earth leads to a significant amount of energy loss on Earth. Earth is not rigid, and it is also distorted by tidal forces.

In addition to the effects just discussed, remember that as Earth rotates, the Moon is also orbiting Earth. This leads to the result that there are not quite exactly two high tides per day, because they occur once every 12 h and 26 min (Problem 5-19). The plane of the moon's orbit about Earth is also not perpendicular to Earth's rotation axis. This causes one high tide each day to be slightly higher than the other. The tidal friction between water and land mentioned previously also results in Earth "dragging" the ocean with it as Earth rotates. This causes the high tides to be not quite along the Earth-Moon axis, but rather several degrees apart as shown in Figure 5-13.

PROBLEMS

- 5-1. Sketch the equipotential surfaces and the lines of force for two point masses separated by a certain distance. Next, consider one of the masses to have a fictitious negative mass $-M$. Sketch the equipotential surfaces and lines of force for this case. To what kind of physical situation does this set of equipotentials and field lines apply? (Note that the lines of force have *direction*; indicate this with appropriate arrows.)
- 5-2. If the field vector is independent of the radial distance within a sphere, find the function describing the density $\rho = \rho(r)$ of the sphere.

- 5-3. Assuming that air resistance is unimportant, calculate the minimum velocity a particle must have at the surface of Earth to escape from Earth's gravitational field. Obtain a numerical value for the result. (This velocity is called the *escape velocity*.)
- 5-4. A particle at rest is attracted toward a center of force according to the relation $F = -mk^2/x^3$. Show that the time required for the particle to reach the force center from a distance d is d^2/k .
- 5-5. A particle falls to Earth starting from rest at a great height (many times Earth's radius). Neglect air resistance and show that the particle requires approximately $\frac{9}{11}$ of the total time of fall to traverse the first half of the distance.
- 5-6. Compute directly the gravitational force on a unit mass at a point exterior to a homogeneous sphere of matter.
- 5-7. Calculate the gravitational potential due to a thin rod of length l and mass M at a distance R from the center of the rod and in a direction perpendicular to the rod.
- 5-8. Calculate the gravitational field vector due to a homogeneous cylinder at exterior points on the axis of the cylinder. Perform the calculation (a) by computing the force directly and (b) by computing the potential first.
- 5-9. Calculate the potential due to a thin circular ring of radius a and mass M for points lying in the plane of the ring and exterior to it. The result can be expressed as an elliptic integral.* Assume that the distance from the center of the ring to the field point is large compared with the radius of the ring. Expand the expression for the potential and find the first correction term.
- 5-10. Find the potential at off-axis points due to a thin circular ring of radius a and mass M . Let R be the distance from the center of the ring to the field point, and let θ be the angle between the line connecting the center of the ring with the field point and the axis of the ring. Assume $R \gg a$ so that terms of order $(a/R)^3$ and higher may be neglected.
- 5-11. Consider a massive body of arbitrary shape and a spherical surface that is exterior to and does not contain the body. Show that the average value of the potential due to the body taken over the spherical surface is equal to the value of the potential at the center of the sphere.
- 5-12. In the previous problem, let the massive body be inside the spherical surface. Now show that the average value of the potential over the surface of the sphere is equal to the value of the potential that would exist on the surface of the sphere if all the mass of the body were concentrated at the center of the sphere.
- 5-13. A planet of density ρ_1 (spherical core, radius R_1) with a thick spherical cloud of dust (density ρ_2 , radius R_2) is discovered. What is the force on a particle of mass m placed within the dust cloud?

*See Appendix B for a list of some elliptic integrals.

- 5-14. Show that the gravitational self-energy (energy of assembly piecewise from infinity) of a uniform sphere of mass M and radius R is

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- 5-15. A particle is dropped into a hole drilled straight through the center of Earth. Neglecting rotational effects, show that the particle's motion is simple harmonic if you assume Earth has uniform density. Show that the period of the oscillation is about 84 min.
- 5-16. A uniformly solid sphere of mass M and radius R is fixed a distance h above a thin infinite sheet of mass density ρ_s (mass/area). With what force does the sphere attract the sheet?
- 5-17. Newton's model of the tidal height, using the two water wells dug to the center of Earth, used the fact that the pressure at the bottom of the two wells should be the same. Assume water is incompressible and find the tidal height difference h , Equation 5.55, due to the Moon using this model. (Hint: $\int_0^{y_{\max}} \rho g_y dy = \int_0^{x_{\max}} \rho g_x dx$; $h = x_{\max} - y_{\max}$, where $x_{\max} + y_{\max} = 2R_{\text{earth}}$, and R_{earth} is Earth's median radius.)
- 5-18. Show that the ratio of maximum tidal heights due to the Moon and Sun is given by

$$\frac{M_m}{M_s} \left(\frac{R_{Es}}{D} \right)^3$$

and that this value is 2.2. R_{Es} is the distance between the Sun and Earth, and M_s is the Sun's mass.

- 5-19. The orbital revolution of the Moon about Earth takes about 27.3 days and is in the same direction as Earth's rotation (24 h). Use this information to show that high tides occur everywhere on Earth every 12 h and 26 min.
- 5-20. A thin disk of mass M and radius R lies in the (x, y) plane with the z -axis passing through the center of the disk. Calculate the gravitational potential $\Phi(z)$ and the gravitational field $\mathbf{g}(z) = -\nabla\Phi(z) = -\hat{\mathbf{k}} d\Phi(z)/dz$ on the z -axis.
- 5-21. A point mass m is located a distance D from the nearest end of a thin rod of mass M and length L along the axis of the rod. Find the gravitational force exerted on the point mass by the rod.