Martes 6 de Junio 2023

Resolviendo el último examen:

1). $Z = x^{3/2}$ Nota: Este se resolvió el Jueves 8 de Junio 2023.

Escribir la 1a ley de la conservación ("Nos pidió que la numeráramos")

Esto viene en el ejemplo 6.2

Adolfo Vidales Basurto

mis proyectos:

http://zonasocial.com

http://maestroencasa.net

http://iglesialaodicea.com

http://repararsalud.com

adolfo.vidalesbasurto@fisica.uaz.edu.mx

Física U.A.Z. MX

$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad F = ma$

Ya que $T = \frac{1}{2}mv^2$ ("Energía cinética")

$W = \int F\cdot dr = \int \left(m\frac{dv}{dt}\right)dr = \int m\,dv\frac{dr}{dt} = \int m\,dv\,v = m\int v\,dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2)$

En lagrangiano como lo escribimos

$= T_2 - T_1$

Ahora Escribiremos la expresión para el potencial 'U':

$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{V_1}^{V_2} -\vec{\nabla}(V)\cdot d\vec{r} = -\int_{V_1}^{V_2}\frac{\partial V}{\partial r}\cdot d\vec{r} = -(V_2 - V_1)$ (abusamos notación)

$T = V_1 - V_2$

¿Cómo Va la Energía Total?

$\boxed{E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgy}$ $E = \frac{1}{2}mv^2$

¿En qué casos se puede escribir la E_{total}?

R. Cuando es conservativa.

¿Cuando decimos que un potencial es conservativo?

R. $\underbrace{\nabla\times F = 0}_{\text{rotacional}}$ y $\underbrace{\oint F\cdot dr = 0}_{\text{aparte}}$

Estos son los Teoremas de Conservación de Energía y Potencial.

Ejercicio 1: Encontrar ley de movimiento del potencial $V = -Bx^4$ donde $B = cte$

Lo sacamos a partir de $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - Bx^4$

luego hacemos el diferencial, luego hacer el cuadrado, etc.

las condiciones $X(0) = X_0$, $E = 0$

$0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Bx^4$ Es esta cosa "Dijo el profe" $\dot{x}^2 = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U}$

$\dot{x}^2 = \frac{2Bx^4}{m} \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{B}\,x^2$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{B}\,x^2$ despejamos dt (Un lado x y otro t)

$\int_{x_1}^{x_2} dx\frac{1}{x^2} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{B}\,dt$

$-x^{-1} + C\Big|_{x_1}^{x_2} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{B}\,(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + C_2$

Aplicando la condición inicial:

$\boxed{-\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{B}\,t + C_3}$

Examen para los compañeros (Magallanes y Medina)

1). $\int_1^3 (2y'^2 - x^2y)\,dx$

$y(0) = 1, \quad y(-1) = 0$

2). $z = \frac{1}{3}y^{1/2}$

Encontrar $y(x)$ que minimiza ó maximiza eso.

EN EL EXÁMEN VIENE UNO DE ESTOS A FUERZA.

Ejercicio 2:

Sara resolvió este

$x = a$

$U(x) = -V_0x^2$

Aquí hay una condición que no puede Valer única: $\dot{x} = 0$ esto significa que $x = a$

Entonces vamos a sustituir $x = a$ en el potencial para hasta que esté la expresión de la Energía Total.

Tenemos que partir de:

$\dot{x}^2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{E - U}$

R. $\dot{x}^2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{E + V_0x^2}$

Sustituyendo la condición inicial:

$0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{E + V_0x^2}$

Despejamos a E para saber cuánto vale la Energía

$\sqrt{E + V_0x^2} = 0 \Rightarrow E + V_0x^2 = 0 \Rightarrow E = -V_0x^2$

Sustituyo $x = a$

$E = -a^2V_0$

Ahora que ya sustituí Condiciones iniciales Me regreso A mi Ec. original

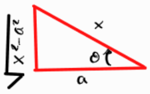
y sustituyo Resultados

$\dot{x}^2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{E + V_0x^2}$

$\dot{x}^2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{-a^2V_0 + V_0x^2}$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{V_0(x^2 - a^2)}$ despejamos dt (un lado x y el otro t)

$\int \frac{1}{\sqrt{V_0(x^2 - a^2)}}\,dx = \sqrt{\frac{m}{2}}\int dt$



$\sec\theta = \frac{x}{a}$

$x = a\sec\theta$

$dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

Aquí Estamos Resolviendo la Ley del Movimiento A PARTIR de un Potencial

¿Cuál es la ley del movimiento? R. es $\frac{x}{dt}$ la función

$\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{V_0}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{V_0}\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\,dx$

$= \int \frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{V_0}\sqrt{\sec^2\theta - 1}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{V_0}\sqrt{\tan^2\theta}}$

$= \int \frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{V_0}\tan\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\sqrt{V_0}}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{V_0}}\ln(\sec\theta + \tan\theta)$

$\frac{1}{\sqrt{V_0}}\ln(\sec\theta + \tan\theta) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,t$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{V_0}}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,t}$

Lo podemos dejar así ya que despejar la x nos puede llevar a equivocarnos

Ejercicio 3:

Alejandro lo resolvió

$U(x) = V_0(x^2 - a^2)$

$E = -V_0a^2$

En Este caso: la Energía U_0 es Cero

la Energía U_0 la estamos sacando de una condición inicial

∴ ya solo es hacer el procedimiento

$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U}$

Sustituimos directamente:

$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{-V_0a^2 + V_0(x^2 - a^2)}$

$= \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V_0x^2}$

$a^2 - x^2$

$V_0(a^2 + a^2 - x^2)$

$V_0(2a^2 - x^2)$

$(V_0 2a^2 - V_0x^2)$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V_0}\,x$

$\int \frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V_0}\,x$

$\ln(x) = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V_0}\,t + c$

$x = e^{\sqrt{\frac{2V_0}{m}} + c}$

¿Qué tipo de movimiento es?

R. Es una Exponencial

Se va muy rápido

MIÉRCOLES 7 JUNIO 2023

Adolfo Vidales Basurto
mis proyectos:
http://lazonasocial.com
http://maestroencasa.net
http://iglesialaodicea.com
http://repararsalud.com
adolfo.vidalesbasurto@fisica.uaz.edu.mx
Física U.A.Z. MX

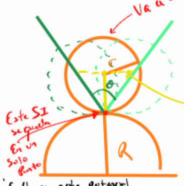
Ejemplo 1:

a ella le importa la aceleración

Va a comenzar a balancearse a un lado y a otro

¿Cómo podemos escribir el potencial?

R. vamos a tener θ, la masa, la gravedad la altura, ¿Qué tenemos en 'y'?



segmento de los límites $\sin\theta$

Nos va a decir cuánto va a bajar y subir

R y r son ctes.

¿Cuál es este potencial que depende del ángulo?

$$U(\theta) = mg\left[R + r\cos\theta + r\theta\sin\theta\right]$$

Este es el segmento de cómo se mueve.

Entonces vamos a encontrar LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

$$\frac{dU}{d\theta} = \cancel{mg}\left[-r\cancel{\sin\theta} + r\theta\cos\theta + r\cancel{\sin\theta}\right] = 0$$

Esto obviamente tiene que ser cero

$$= r\theta\cos\theta = 0$$

Esto nos queda

¿Cuál es la primera solución?

$$\theta_1 = 0,\ \frac{\pi}{2}$$

Esta es la otra solución. Cualquier múltiplo de $\frac{\pi}{2}$

¿Cuál es el Punto Estable?

R: O cero

$$\frac{d}{d\theta}(r\theta\cos\theta) = r\cos\theta - r\theta\sin\theta$$

Para $\theta = 0$; Para $\theta = \frac{\pi}{2}$

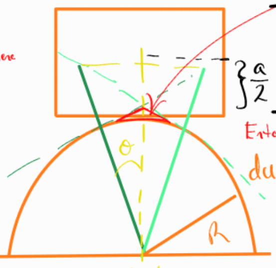
$$\frac{d}{d\theta} = r \longrightarrow \text{Estable}$$

Ejemplo 2:

¿Cómo iría aquí el Potencial?

R. Otra vez va a depender de θ, se va a balancear en una diferente situación, la anterior está sobre un punto

ESTE PUEDE DESLIZARSE! No se quedaría en un solo punto.



Este se desliza; No se quedará en un solo punto!

¿necesita la 'a'? ¿Le importa al potencial horizontalmente esta altura? R.NO

∴ El potencial se queda así:

$$U(\theta) = mg\left[\left(R + \frac{a}{2}\right)\cos\theta + (R)\theta\sin\theta\right]$$

Entonces vamos a encontrar LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO . Lo sacó Rony de Colita dijo el Profe que parece hacerlo uno de colita.

$$dU(\theta) = \cancel{mg}\left[\left(R + \frac{a}{2}\right)(-\sin\theta) + R\theta\cos\theta + R\sin\theta\right] = \cancel{mg}\left[-\frac{a}{2}\sin\theta + R\theta\cos\theta\right] = 0$$

$$\boxed{-\frac{a}{2}\sin\theta + R\theta\cos\theta = 0}$$

Matemáticamente si va a ser un solo punto

ESTE Puede 'barrer' todo eso.

$$-\frac{a}{2}\sin\theta = -R\theta\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{a}R\theta \qquad \boxed{\theta = 0}$$

Es punto de equilibrio.

$$\tan\theta = \frac{2}{a}R\theta$$

Se usa esta, es decir, antes de hacer separaciones y todo eso.

Ahora Karen pasa a deducir si es ESTABLE ó INESTABLE.

(derivar y sólo es sustituir el Punto de equilibrio en el Potencial)

$$\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{a}{2}\sin\theta + R\theta\cos\theta\right) =$$

$$-\frac{a}{2}\cos\theta - R\theta\sin\theta + R\cos\theta = -\frac{a}{2} + R \Rightarrow R > \frac{a}{2} \rightarrow \text{Estable}$$

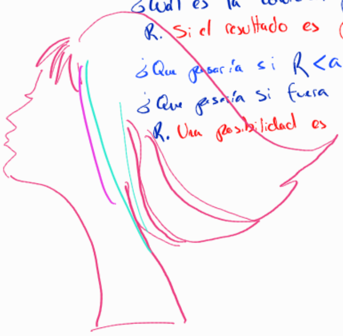
¿Cuál es la condición para saber si es estable ó inestable?

R. Si el resultado es positivo = estable, negativo = inestable.

¿Qué pasaría si $R < a$? R. Sería una caniquita con una CAJOTA ¡¿ESA ES LA INTERPRETACIÓN?!

¿Qué pasaría si fuera inestable? ¿Cómo sería su situación Física?

R. Una posibilidad es que estuviera en una esquina. Ese sería un punto MUY INESTABLE



Ejemplo 3:

$$U(x) = -V_0\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}\right)$$

$$= -V_0\left(-ax^{-2} + \frac{x}{a^2}\right)$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -V_0\left(-(-2)ax^{-3} + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$= -V_0\left(2ax^{-3} + \frac{1}{a^2}\right) = 0$$

$$= 2ax^{-3} + \frac{1}{a^2} = 0$$

$$2ax^{-3} = -\frac{1}{a^2}$$

$$x^{-3} = -\frac{1}{2a^3}$$

$$\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2a^3}$$

$$x^3 = -2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{-2a^3}$$

$$= -2^{1/3}a$$

Este ejemplo Solo tiene 1 solo Punto de Equilibrio

¡No necesariamente debe tener 2!

Ahora Vamos a ver que tipo de punto de Equilibrio es este.

Julissa desarrolla esto:

$$-V_0\left(2ax^{-3} + a^{-2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(-V_0\left(2ax^{-3} + a^{-2}\right)\right) = -V_0\left(-6ax^{-4}\right)$$

$$= \frac{6V_0a}{x^4} \qquad x = 2^{4/3}a^4$$

$$= 6V_0a$$

Es estable

también el 0 es estable.

Ejemplo 4:

Alexis hace este problema.

Sacar Potencial a partir de esta Fuerza.

$$F = -\frac{1}{2}kx + \alpha\frac{k^2}{3}x^2$$

$$\boxed{\nabla\phi = -F}$$

$$\int F\,dx = -\frac{1}{2}\int kx\,dx + \alpha k^2\int x^2\,dx$$

$$-k\frac{x^2}{4} + \alpha k^2\frac{x^3}{9} = kx^2\left[-\frac{1}{4} + \frac{\alpha kx}{9}\right] + C$$

Ahora sacar Puntos De EQUILIBRIO

$$\frac{d}{dx}\left[kx^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{akx}{9}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{kx^2}{4} + \frac{ak^2x^3}{9}\right]$$

$$\frac{d}{dx} = -\frac{2kx}{4} + \frac{3ak^2x^2}{9}$$

$$= -\frac{kx}{2} + \frac{ak^2x^2}{3}$$

$$-\frac{kx}{2} + \frac{ak^2x^2}{3} = 0$$

$$\frac{kx}{2} = \frac{ak^2x^2}{3}$$

$$\frac{k}{2} = \frac{ak^2x}{3}$$

$$\frac{3k}{2ak^2} = x \Rightarrow x = \frac{3}{2ak}$$

1 Punto de Equilibrio

RUTH !!

Ahora ver si es estable ó inestable

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{kx}{2} + \frac{ak^2x^2}{3}\right)$$

$$= -\frac{k}{2} + \frac{2}{3}ak^2x$$

Sustituimos Punto de Equilibrio en x:

$$-\frac{k}{2} + \frac{\cancel{2}\cancel{a}}{\cancel{3}}k^2\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2ak}}\right)$$

$$= -\frac{k}{2} + k > 0$$

Es ESTABLE.

Adolfo Vidales Basurto
Mis proyectos:
http://zonasocial.com
http://maestroencasa.net
http://iglesialaodicea.com
http://repararsalud.com
adolfo.vidalesbasurto@fisica.uaz.edu.mx
Física U.A.Z. MX

Jueves 8 de Junio 2023

$z = x^{3/2}$ (Ahora sí, Resolviendo el examen). Euler – Lagrange

R. $z' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $z'^2 = \frac{9}{4}x$

$S = \int \sqrt{1 + y'^2 + \frac{9}{4}x}\, dx \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$

$f = \sqrt{1 + y'^2 + \frac{9}{4}x}$

Por un lado — Y por el otro lado

$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+\frac{9}{4}x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = a$

$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+\frac{9}{4}x}} = a$

$y'^2 = a^2\left(1 + y'^2 + \frac{9}{4}x\right)$

$y'^2(1 - a^2) = a^2\left(1 + \frac{9}{4}x\right)$

$y' = \sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$

Lo ponemos como A para no 'cargarlo'

$y' = A\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$

$y = \int A\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$

Jorge hizo esta integral:

$1 + \frac{9}{4}x = u$

$du = \frac{9}{4}dx$

$y = \int A u^{1/2} \frac{4}{9} du$

$y = \frac{4A}{9}\int u^{1/2} du$

$y = \frac{4}{9} A \frac{2}{3} u^{3/2} + C$

$= \frac{8}{27} A u^{3/2} + C$

$= \frac{8}{27} A\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} + C$

Hasta Aquí Calificó Este Problema. Hasta Aquí quería el Profe que llegáramos.

2do Problema: Euler – Lagrange

$\int_1^2 (y'^2 - 2xy)dx \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = -1$

$f = y'^2 - 2xy$

$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \cancel{2}y'' \Rightarrow \cancel{2}y'' = -2x$

$y'' = -x$

Ya de aquí integramos del modo tradicional

$y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$

$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

Ahora hay que resolver con las condiciones

$0 = -\frac{1}{6} + C_1 + C_2$

$-1 = -\frac{8}{6} + 2C_1$

$1 = \frac{7}{6} - C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6}$

$C_2 = 0$

Sustituimos valores en y

luego

$y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$

$y' = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}$

$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{36} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^2}{3}$

$\int_1^2 \left(\frac{7}{12}x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{36}\right)dx$

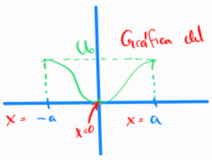
$= \frac{7}{60}x^5 - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{36}x \Big|_1^2$

Hasta Aquí Está bien. Nadie llegó Aquí.

Otro Problema con Potencial: (Hay que encontrar los puntos de equilibrio).

Para la gráfica sustituyendo ta: 2 – 1 = 1

$U(x) = U_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right]$



$= U_0\left[\frac{4x}{a^2} - \frac{4x^3}{a^4}\right]$

$\frac{\cancel{U_0 4} x^{\cancel{3}2}}{a^{\cancel{4}2}} = \cancel{U_0} \frac{\cancel{4x}}{a^2}$

$\frac{x^2}{a^2} = 1$

$x^2 = a^2$

$\boxed{x = \pm a \quad x = 0}$

Puntos de Equilibrio

¿Cuáles son los Puntos estables e inestables?

R. a y 0 son estables
–a es el único inestable

"Obviiiiiooo..." dijeron algunos...

★ Ahora, Quién quiere sacar la Fuerza y expandir en Series de Tylor para encontrar a partir de eso LA FRECUENCIA ANGULAR

Tomar el término lineal

$F = -\nabla U$

$= -\left(U_0\left(\frac{4x}{a^2} - \frac{4x^3}{a^4}\right)\right)$

$U(x) = U_0(x) + \frac{\partial U(x)}{\partial x}x + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{2!}$

igualamos al valor de cero obviamente y encontramos EL TÉRMINO LINEAL

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{4U_0}{a^2}\left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right)$

$-\frac{4U_0}{a^2}\left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right)\Big|_{x=0}$

$-\frac{4U_0}{a^2}x$

$F \approx -\frac{4U_0}{a^2}x \qquad k = \frac{4U_0}{a^2}$

$\boxed{\text{FRECUENCIA ANGULAR} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4U_0}{ma^2}}}$

Mañana Vamos a Ver Oscilador y La Fórmula Que Saca Todo.

Vie 09 de Junio 2023

Ejercicio Único de Este día:

$U(\theta) = -V(\alpha^2\theta + \alpha\cos^2\theta)$

Buscar puntos de equilibrio:

Audio 6:20

$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = -V(\alpha^2\theta - 2\alpha\cos\theta\,\sin\theta) = 0$ Dice el profe que esta es la fuerza

$= -\alpha^2 - 2\alpha\cos\theta\sin\theta = 0$

$2\alpha\cos\theta\sin\theta = \alpha^2$

$\Rightarrow \cos\theta\sin\theta = \frac{\alpha^2}{2\alpha}$

$\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

$\sin 2\theta = \frac{\alpha}{2}$

$2\theta = \arcsin(\alpha)$

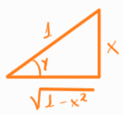
$\theta = \sin^{-1}(\alpha)/2 \leftarrow$ estable (es mayor que cero)

$-V\frac{d}{d\theta}(-\alpha\sin(2\theta)) = +\cos(2\theta)(2)V\alpha$

$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2\alpha V\cos(2\theta) \Rightarrow 2\alpha V\cos(2\arcsin(\alpha))$

$2\alpha V\sqrt{1-\alpha^2} \longrightarrow$ Positivo Estable

$\alpha << 1$



$y = \arcsin(x)$

$\cos(y) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin(y) = x$

Ahora sacar la Frecuencia Angular:

$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = 2V\alpha\cos(2\theta)$

$F' = 4V\alpha\sin(2\theta)$

$\vec{F} = \vec{\nabla}U = F\Big|_0 + \frac{1}{1!}F'\Big|_0\theta + \frac{1}{2!}F''\Big|_0$

$= 0 + \underbrace{(-2\alpha V\sqrt{1-\alpha^2})}_{K}\theta$

Este es el término lineal que contiene la 'K'.

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\boxed{\omega^2 = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{m}}$ Frecuencia Angular.

Ahora veamos un oco sobre las OSCILACIONES:

Nosotros ya sabemos resolver esto con la condición de oscilaciones pequeñas

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K'}{m}}$

Condición de oscilaciones pequeñas

Por ejemplo podemos tener:

$\ddot{x} + \omega^2\,\text{sen}x = 0$

Al ser una oscilación pequeña podemos poner el argumento directamente.

¿Cuáles son las soluciones de esto?

R. Hay 2 tipos de soluciones:

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t - \delta)$

$x(t) = B\cos(\omega t - \delta)$

¿Donde No hay diferencia de fase? $\frac{\pi}{2}$

Ahora veamos la Energía Total:

Es un sistema Conservativo

$E = T + V$

$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V$

Ya sabemos $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t - \delta)$

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t - \delta) \quad \ldots (1)$

$= \frac{1}{2}mA^2\frac{K}{m}\cos^2(\omega t - \delta)$

Estamos hablando de un sistema con un oscilador entonces ¿cómo queda el potencial para un oscilador?

$V = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t - \delta)$

tenemos que: $\omega^2 = \frac{K}{m}$ $\therefore$ tenemos arriba en la Ec (1)

$T = \frac{1}{2}mA^2\frac{K}{m}\cos^2(\omega t - \delta)$

Esto implica que $T + T = T$

Entonces la energía Total conservativa

$E = V + T = \frac{1}{2}KA^2$

¿Qué pasaría si dijeramos:

$x = A$

$\dot{x} = 0$

y si proponemos este potencial

$U = \frac{1}{2}Kx^2$

$t = \sqrt{\frac{2}{m}}\int\sqrt{\frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}Kx^2}\,dx$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U}$

No olvidar Todo ESTO.

Lun 12 de Jun 2023

Recordando lo de las oscilaciones:

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

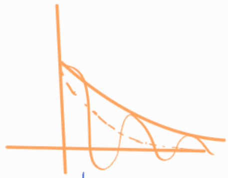
$x(t) = e^{-\beta t}\left[Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + Be^{-\sqrt{\beta^2+\omega_0^2}\,t}\right]$

Sub $\omega_0^2 > \beta^2$

Crítico $\omega_0^2 = \beta^2$

Sobre $\omega_0^2 < \beta^2$

amortiguamiento



oscilador simple

resistencia a la W ayuda

$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \xi\dot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\xi}{ml}}_{2\beta}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2}\theta = 0$

funciona si $\xi = ?$ $\frac{\xi}{2ml} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\xi = 2ml\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\sqrt{\frac{g}{l}} > \frac{\xi}{2ml}$

$\sqrt{\frac{g}{l}} < \frac{\xi}{2ml}$

Oscilador físico

Audio 11:00

$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

$I\alpha = -mgr\sin\theta - F\dot{\theta}$

$\ddot{\theta} = -\frac{mgr}{I}\theta - F\frac{\dot{\theta}}{I}$

$\ddot{\theta} + \frac{mgr}{I}\theta + \frac{F}{I}\dot{\theta} = 0$

$2\beta = \frac{F}{I}, \quad \omega_0^2 = \frac{mgr}{I} = \frac{mgr}{I}$

Ejercicio:

$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \frac{3}{4}\dot{\theta}$

$ml\ddot{\theta} + \frac{3}{4}\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$

$l\ddot{\theta} + \frac{3}{4m}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{3}{4ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Audio 17:50 $\theta = 90°$

$\ddot{\theta} + \frac{3}{4ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\overbrace{\sin\theta}^{1} = 0$

$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{3}{4ml}}_{2\beta}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2}\theta = 0$

$\frac{3}{4ml} = 2\beta$ $\quad \beta = \frac{3}{8ml}$

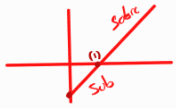
$\frac{g}{l} = \omega_0^2$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Audio 18:50

$\beta^2 = \frac{9}{64m^2l^2}$

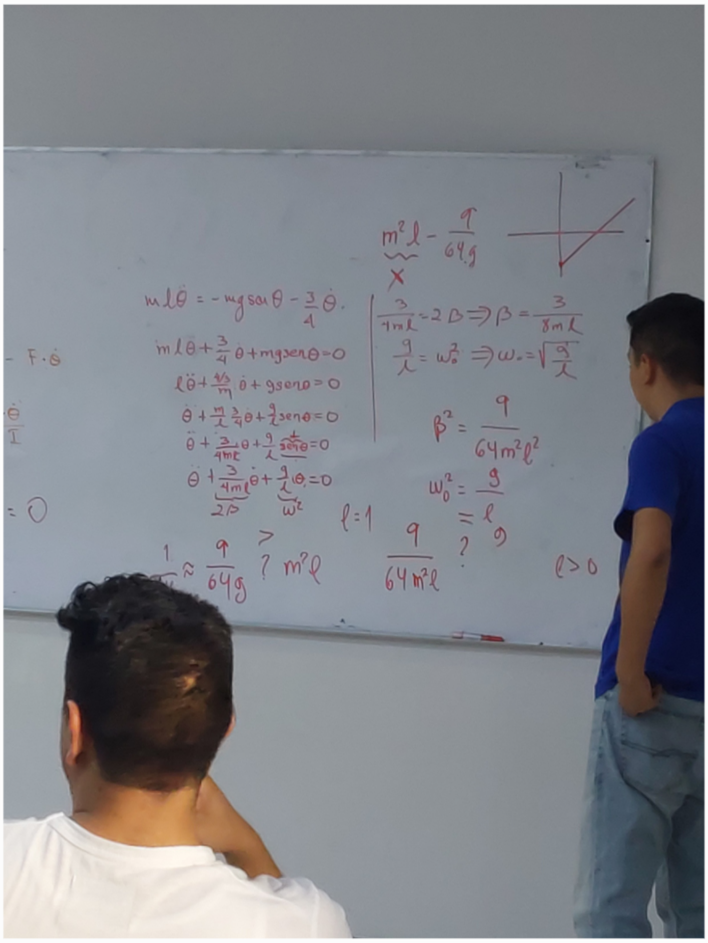
$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Audio 28:00



¿Qué pasa si m
crece
crece
crece?

¿Qué pasa si l
crece
crece
crece?



otro Ejemplo:

$$3m\ddot{\theta} = -10mg\theta - \int_0^5 \dot{\theta}\, d\dot{\theta}$$

$$3m\ddot{\theta} + \int_0^5 \dot{\theta}\, d\dot{\theta} + 10mg\theta = 0$$

$$m\ddot{\theta} + \frac{10mg\theta}{3} + \frac{25}{3\cdot 2\cdot 6} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{10}{3}g\theta + \frac{25}{6m} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{10}{3}g\theta = -\frac{25}{6m}$$

$$A\cos\Big(\sqrt{\tfrac{10}{3}g}\,t - \overset{\text{fase}}{\delta}\Big) = y_h$$

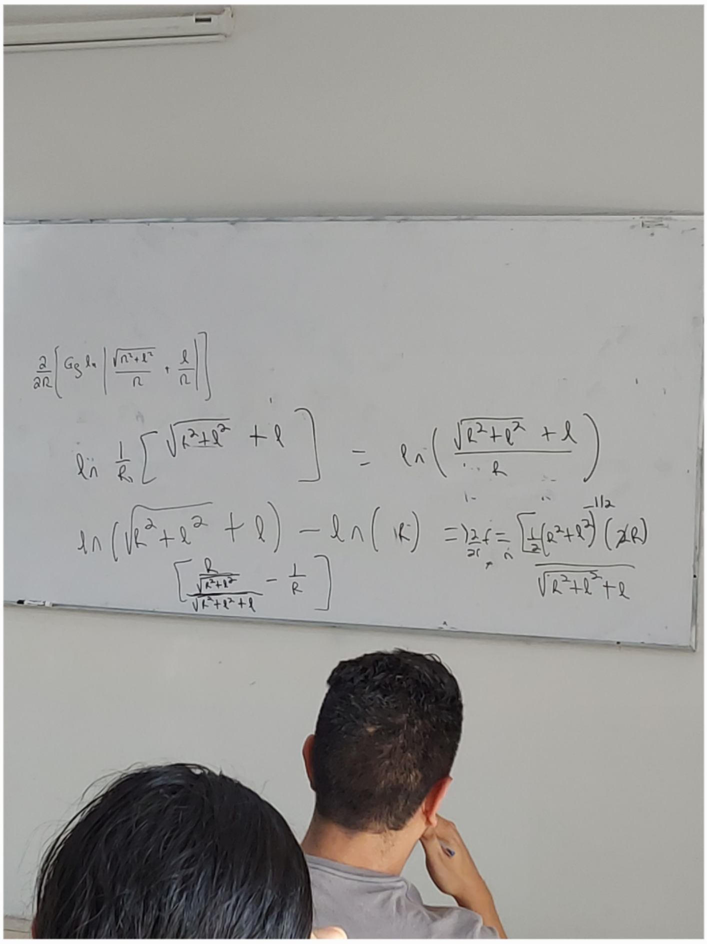
$$y_h + y_p = y \Rightarrow \quad \beta = 0 =$$

$$A\cos\Big(\sqrt{\tfrac{10}{3}g}\,t - \delta\Big)$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2}\Big|_0^5 \qquad \frac{25}{2}$$

Acá 36:00 Ec diferencial

Tip: 43:00



Martes 13 Junio 2023

$$\vec{F} = -Gm\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r^2}\hat{r}\, dv'$$

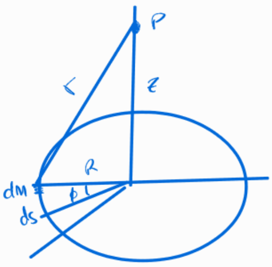
$$\vec{g} = -G\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r^2}\hat{r}\, dv'$$

$$\vec{g} = -\nabla\Phi \qquad \rho = \frac{dM}{ds}$$

$$\rho\, ds = dM$$

Potencial

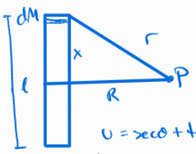
$$\Phi = -G\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r}\, dv'$$



$$\Phi = -G\int \frac{dM}{r} = -G\int \frac{\rho\, ds}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$= -\frac{G\rho}{\sqrt{R^2+z^2}}\int ds = -\frac{G\rho}{\sqrt{R^2+z^2}}\,2\pi R$$

El del examen:



$$u = \sec\theta + \tan\theta$$

$$du = \tan\theta\sec\theta + \sec^2\theta$$

$$\rho = \frac{dM}{dx}$$

$$\Phi = -G\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{x^2+R^2}} = -\frac{G\rho}{R}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{R^2}+1}} = -G\rho\int \sec\theta\left(\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\right)d\theta = -G\rho\int\frac{du}{u} = -G\rho\ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

$$= -G\rho\ln\left|\frac{\sqrt{R^2+x^2}}{R} + \frac{x}{R}\right|_{0\,\text{cero}}^{\ell} = -G\rho\left[\ln\left|\frac{\sqrt{R^2+\ell^2}}{R^2} + \frac{\ell}{R}\right|\right]$$

borro Alexis

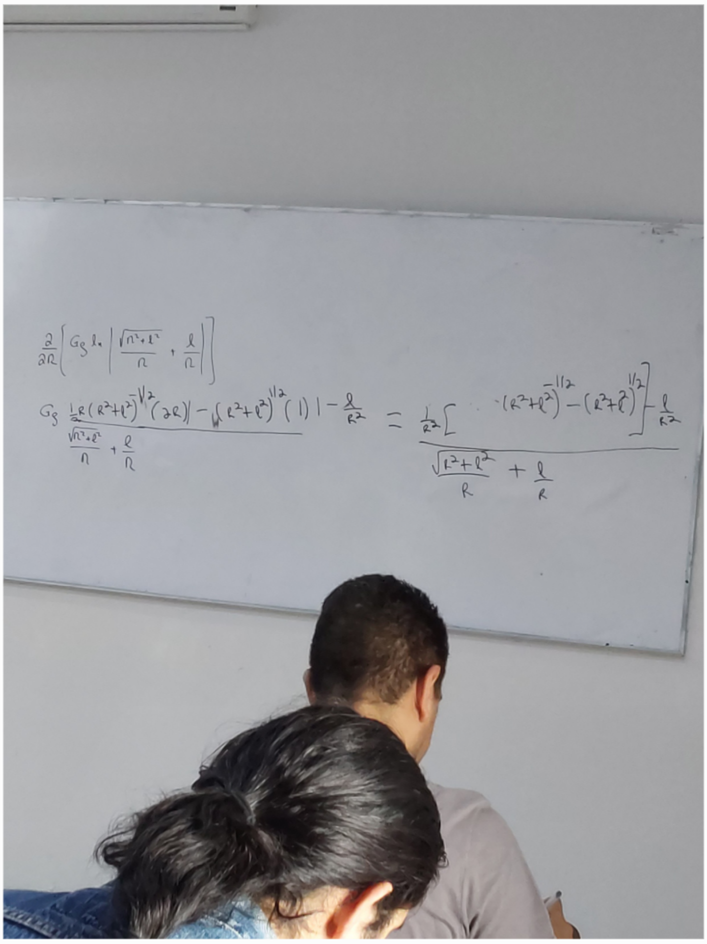
Este lo dijo!

Hacemos gradiente para sacar la Fuerza

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[G\rho\ln\left|\frac{\sqrt{R^2+\ell^2}}{R} + \frac{\ell}{R}\right|\right]$$

borró todo Alexis

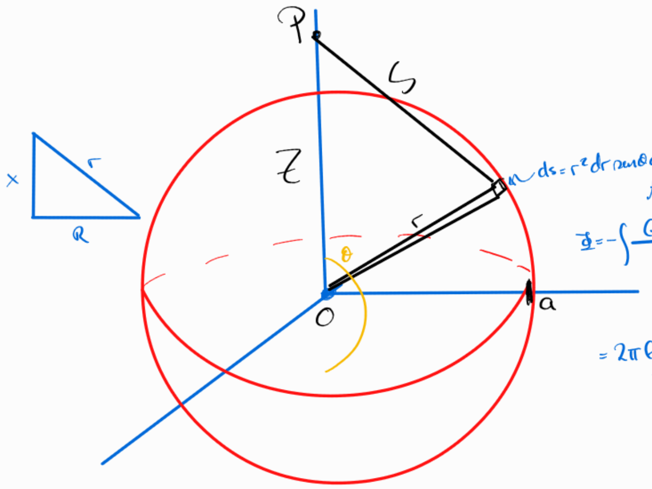
$$\frac{\partial}{\partial R}\Big[$$



$\frac{\partial}{\partial R}\left[G_g \ln \left| \frac{\sqrt{R^2+l^2}}{R} + \frac{l}{R} \right| \right]$
$G_g \frac{\frac{1}{2}R(R^2+l^2)^{-1/2}(2R) - (R^2+l^2)^{1/2}(1) - \frac{l}{R^2}}{\frac{\sqrt{R^2+l^2}}{R} + \frac{l}{R}} = \frac{\frac{1}{R^2}\left[(R^2+l^2)^{-1/2} - (R^2+l^2)^{1/2} \right] - \frac{l}{R^2}}{\frac{\sqrt{R^2+l^2}}{R} + \frac{l}{R}}$

Martes 13 Junio 2023

Otro Ejemplo:



$ds = r^2 dr \, \text{sen}\,\theta \, d\theta \, d\phi$

$\rho = \dfrac{dM}{ds}$

$\Phi = -\int \dfrac{G\,dM}{s}$ $\quad dM = \rho\, r^2 dr \, \text{sen}\,\theta \, d\theta \, d\phi$

$$= 2\pi G\rho \int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{r^2 dr \,\text{sen}\,\theta \, d\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2zr\cos\theta}}$$

$u = z^2+r^2-2zr\cos\theta$

$du = 2zr\,\text{sen}\,\theta$

Esfera Sólida

con ρ homogénea

$$= -2\pi G\rho \int_0^a\int_0^{\pi} \frac{r^2 \,\text{sen}\,\theta \, d\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}} dr = 2\pi G\rho \int_0^a \int \frac{r\,du}{2z\sqrt{u}} dr = -2\pi G\rho \int_0^a \frac{r}{\cancel{2}z} \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\Bigg|_{u_1}^{u_2} dr$$

$$= -2\pi G\rho \int_0^a \frac{r}{z}\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}\,\Bigg|_0^{\pi} dr = -2\pi G\rho \int_0^a \frac{r}{z}\left[\sqrt{z^2+r^2+2rz} - \sqrt{z^2+r^2-2rz}\right] dr$$

$$= -2\pi G\rho \int_0^a \frac{r}{z}\left[z+r-(z-r)\right] dr = -2\pi G\rho \int_0^a \frac{2r^2}{z} dr = -2\pi G\rho \frac{2}{z}\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{-4\pi G\rho a^3}{3z} = -\frac{MG}{z}$$